物理学B，D
第1章　クーロンの法則と電界

＜学習のポイント＞

・連続的な分布をしている物理量を線積分，面積積分，体積積分で扱う考え方

・ベクトル量とスカラー量

～講義の開始に当たって～

- 物理学B,D　　半期ずつ2×2単位
  1年次共通科目で必修(落第の場合進級条件に絡んでくる)
  評価方法　　　　期末試験80点
  （平常点（満点20点）はDを救う際に用いる）

- 演習では出席点もつくので必ず演習には出席すること。

- 網羅している内容は，高校の物理と大きな違いはないが，公式を暗記して解法のテクニックを磨くのが目的ではない。
  本質を知り，論理的に原理を積み上げて考える能力を養い科学の基盤となっている電磁気学の基礎を身に着けるのが目的。

- 数学的記述に早く慣れる

$$\iint ds\,,\ \iiint dV\ ,\text{微分方程式}$$

  高校では習わなかった，***D***（電束密度），***B***（磁束密度）

- 数式を暗記するのではなく，イメージを作って，式を用いずに文章で説明できる能力が重要

- 講義の前に，教科書を斜め読みして何を学ぶのかを前もって知っておくのが講義を理解するコツ。そして，演習時間に疑問を解消する。疑問を積み重ねていくとどんどん新しい章の内容がわからなくなる。
  HPの講義アンケート結果に先輩からのアドバイスがあるので参考に

■電気力
コハクと毛皮をこすると帯電して物をくっつける(摩擦電気)

1700年代

Du Fay:　電気には2種類あり、同様のものは互いに斥けあい、異種のものは互いに引きあう。

Benjamin Franklin:　ただ一種の電気

一方は他方より電気を過剰に持っている。

(＋)→(－)　近づけると不足した方に移るのが火花

電気の量は不滅　(＋)ができれば(－)ができる。

＜Coulombの実験＞

①電荷の間の反撥力がその間の距離の2乗に逆比例する。

②力が電荷の量に比例する。

$$F = a\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

"電気とは何か?"

物質はすべて素粒子(電子、陽子、中性子)からできていてこれらの素粒子は

$$e=1.6\times 10^{-19}\ [\mathrm{c}]$$

の整数倍(又は0)の電荷をもっている。

電気力を加えると、*ne*の力を受ける。

- $(-e)+(+e)=0$　消滅して光子になる。保存則が成り立ち不変である。
- 電気を持つというのは素粒子の持っている電荷の代数和が0ではないことをさす
- Q: なぜ原子の核(＋)と電子(－)はくっつかないのか
- Q: 核の中で陽子同士が反発しないでくっついているのはなぜ?

1.1 クーロンの法則

$$F = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}[N]$$

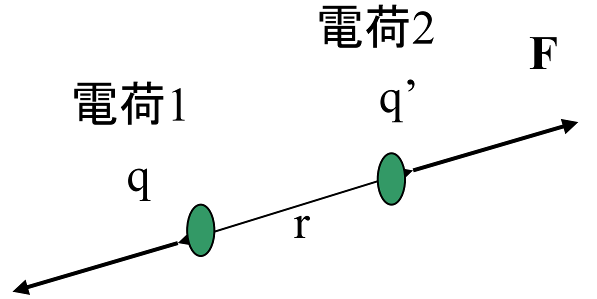
$$\mathbf{F} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r} \quad [N]$$

ε_0(真空の誘電率)=8.85×10^{-12}[F/m]

q,q':電荷の電気量　[C]

r:電荷間の距離

$F>0$:反発力, $F<0$:引力

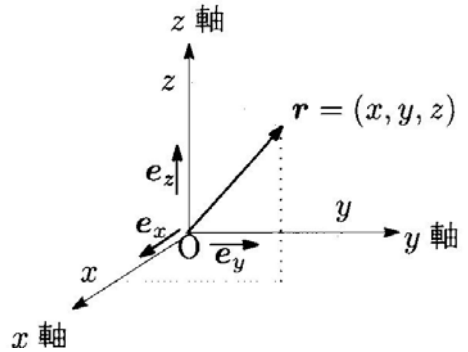


- **場(Field)**

物体間の相互作用を記述するには，作用を及ぼしあっている物体間の遠隔作用としても定式化できるし，また，一方の系による場(field)の生成と，この場の他方系への作用という2段の過程に分離しても考えられる

スカラー場:空間内の各点における1つの量の時間依存性によって記述される。

3次元ベクトル場:そのような3つの量によって記述される



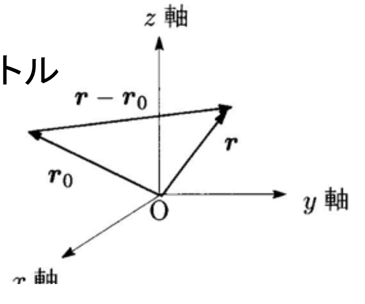
$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\mathbf{r}$:位置ベクトル

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

基底ベクトル:大きさ1

相対位置ベクトル



e_rはr方向の基底ベクトルとして定義できる

1.2 電界のベクトル表示

電界とは電荷が力を受けるようなベクトル場　**E**[V/m]

　|**E**|:その場におかれた単位電荷に働く力

　方向:その力の方向

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad [N]$$

クーロンの法則と比べると，原点に電荷があるときの電界は

$$|\mathbf{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

ベクトル表示すると

$$\mathbf{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

点電荷から距離rの点では同じ力を受けるため，点電荷からの電界は放射状

- x, y, z 方向成分のベクトルにわけて表現すると

$$\boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{r}) = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{E}_y(\boldsymbol{r}) = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{E}_z(\boldsymbol{r}) = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{e}_z$$

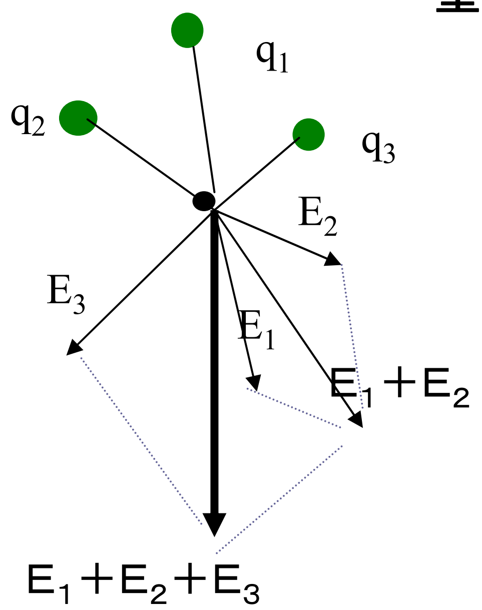
- 位置ベクトル $\boldsymbol{r}_0$の位置に点電荷qがある場合に，位置 $\boldsymbol{r}$ での電界は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

１．３ 電界の重ね合わせ

いくつかの電荷によって生じる電界は，個々の電荷が作る電界をベクトル的に合成すればよい

重ね合わせの原理

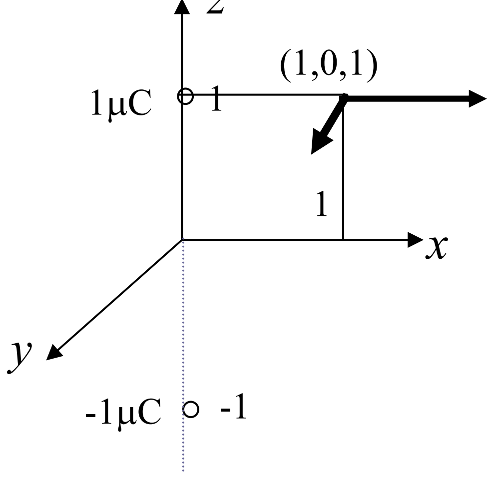


ベクトル的加算

大きさはそれぞれのベクトルの大きさの和ではない

時間に依存しない電界を**静電界**とよぶ.

【例題1-2】

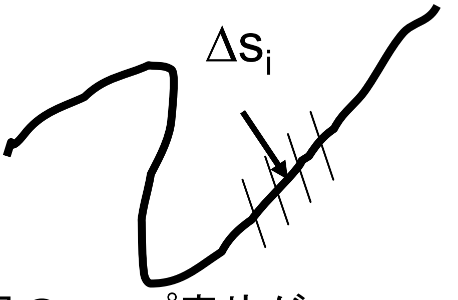


３次元空間でのベクトル和をいかに表現するか
→x，y，z成分で表現

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{r-r_1}{|r-r_1|^3} - \frac{r-r_2}{|r-r_2|^3}\right\}$$
$$= \frac{10^{-6}}{4\cdot 3.14\cdot 8.85\times 10^{-12}}\left\{(1,0,0) - \frac{1}{5\sqrt{5}}(1,0,2)\right\}$$
$$= \left(8.19\times 10^{3}, 0, -1.61\times 10^{3}\right)[\mathrm{V/m}]$$

面積積分（２重積分）

積分とは，和を求めることですが，数学から，１次元，２次元，
３次元の空間においてそれを適応してみる。
まずは，簡単な1次元からスタートする。



右図のような，長さLの１本のロープの重さを求めることを考える。ただし，比重は一様ではなく場所によって異なる。

まず，ロープを細かくn 分割する。今，i 番目のロープ素片が長さΔs_i[m]であったとし，この部分の比重が長さあたり ρ_i[kg/m]であったとすると，この素片の重さは $\rho_i \Delta s_i$と書ける。従って，ロープ全体の重さは総和をとって，近似的に

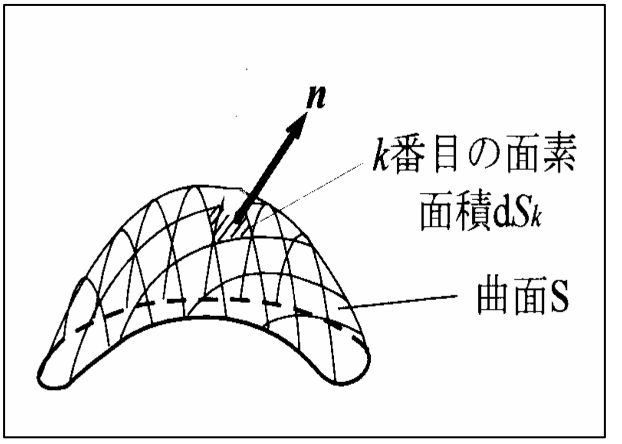
$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i \Delta s_i$$

と書ける。近似的と書いたのは，素片で比重が厳密には一定でないからである。分割数nを大きくしていけば精度が向上し，無限大まで大きくしたとき，これを積分記号で表す。

$$\int_{s=0}^{s=L} \rho(s) ds$$

比重は，長さ方向の座標s の関数であるとした

全く同じようにして，２次元に拡張してみよう。



右図のような閉曲面があって，表面にある面密度布ρ[kg/m^2]で粒子が塗布されていたとき全粒子の重さを求める。今，表面をn個の微小面素片に分割します（パッチワークを想像下さい）。

ｉ番目の素片の面積をΔS_iとし，その素片での粉の塗布密度をρ_iとすると，その素片での塗布された粒子の重さは$\rho_i \Delta S_i$です。従って，全n個の総和をとると，重さは近似的に以下のように書ける。

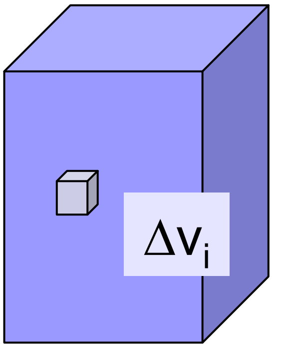
$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i \Delta S_i$$

素片の面積を小さくしてnを無限大まで大きくすることで精度が上がるので，積分記号でそれを書くと以下のようになる。

$$\iint \rho(S) dS$$

ここで，２重積分が出てきた。これは，ロープと異なり，足しあわす素片の単位ΔSは2次元の面積。面で積分するということは，たとえば「縦」と「横」のように１次元方向を2回積分することに対応する。そこで，その意味を式に残すために2重積分の記号を書く。いかに数学として積分するかは，具体的に1次元の積分になるように式を書き直して2回個々の変数で積分する。電磁気で出てくる，球や円筒の場合には，置換積分をして半径方向の積分 *dr* で書き表す。

体積積分（3重積分）



右図のような，立体の重さを求めることを考える。ただし，比重は一様ではなく場所によって異なる。まず，立体を細かく n 分割する。今，i 番目の立体素片が堆積Δv_i[m^3]であったとし，この部分の比重が単位堆積あたり ρ_i[kg/m^3]であったとすると，この素片の重さは $\rho_i \Delta v_i$と書ける。

従って，全体の重さは総和をとって，近似的に

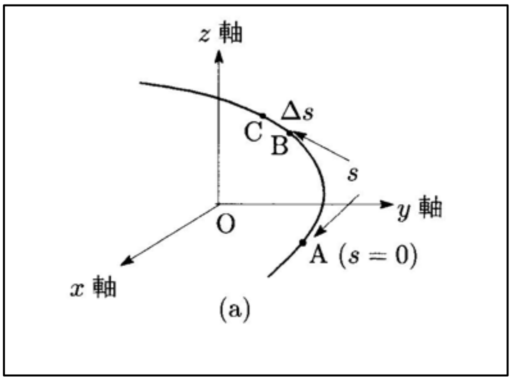
$$\sum_{i=0}^{n} \rho_i \Delta v_i$$

と書ける。近似的と書いたのは，素片で比重が厳密には一定でないからである。分割数nを大きくしていけば精度が向上し，無限大まで大きくしたとき，これを積分記号で表す。

$$\iiint \rho(v) dv$$

1．4　電荷の連続的な分布

(1)



線状に連続的に分布した電荷の総和

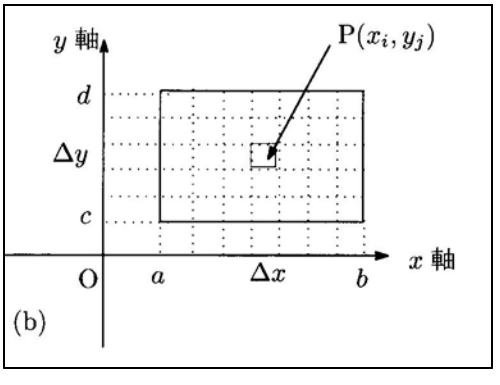
電荷線密度[C/m]

$$\sigma(s) \equiv \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q(s)}{\Delta s} = \frac{dq(s)}{ds}$$

総電荷量

$$Q = \int_a^b \sigma(s) ds \quad [C]$$

(2)



面状に連続的に分布した電荷の総和

電荷面密度[C/m²]

$$\omega(x, y) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta q(x_i, y_i)}{\Delta x \Delta y} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q(x_i, y_i)}{\Delta S}$$

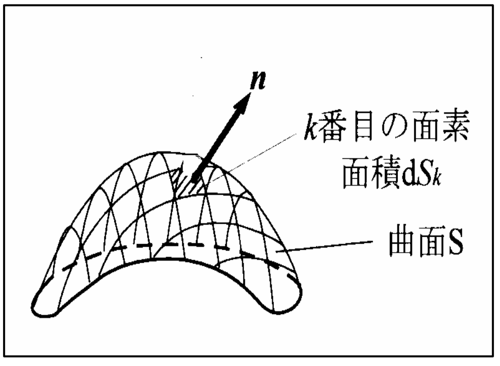
総電荷量

$$Q = \iint_{a \le x \le b, c \le y \le d} \omega(x, y) dS \quad [C]$$

(3)

曲面上状に連続的に分布した電荷の総和

→ 微小の面素片に分割すれば，平らな面状に分布した場合と取り扱いは同じ



$$Q = \iint_S \omega(\boldsymbol{r})dS \ \ [C]$$

(4)

3次元空間内に連続的に分布した電荷の総和

電荷（体積）密度[C/m³]

$$\rho_P = \rho(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

総電荷量

$$Q = \iiint_\Omega \rho(\boldsymbol{r})dV \ \ [C]$$

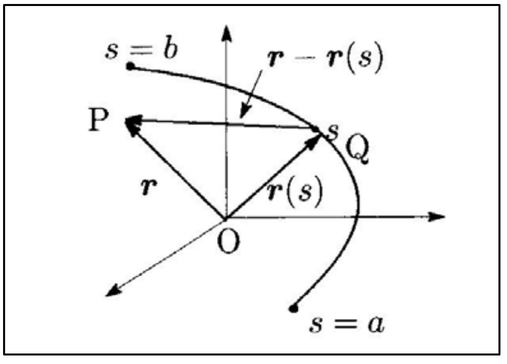
1.5 連続的な電荷分布による電界

連続的に分布している電荷が作る電界を積分で求める方法は，手計算で求められるケースは限られる．

ここでは，例題2問を通じて考え方を学ぶ．

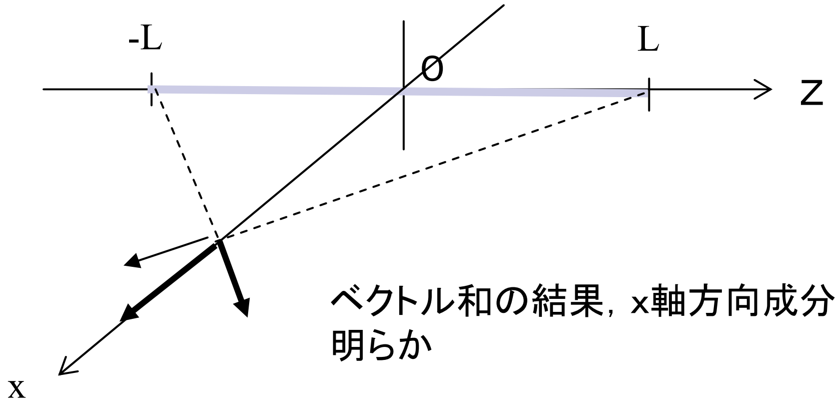
（球，長い円筒，十分に大きい平面に分布しているような場合は，2章でガウスの定理藻用いることで容易に求められることを学ぶ）

【例題1-4】



$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b\frac{\sigma(s)(r-r(s))}{|r-r(s)|^3}ds$$

微小素片の電荷が作る電界をベクトル的に加算する



ベクトル和の結果，x軸方向成分になることは対称性から明らか

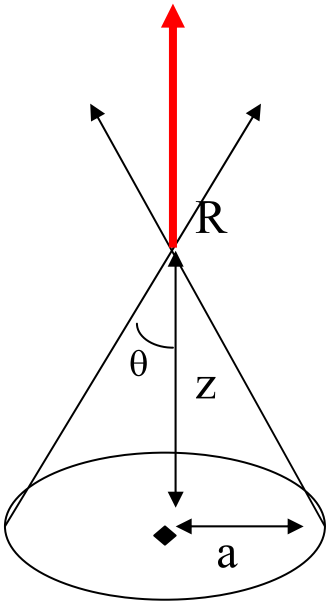
$$E(x,0,0)=\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{(x,0,-z)}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}dz$$

X成分のみ計算すると

$$E_x=\frac{\sigma_0 x}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{L}\frac{dz}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma_0 x}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{x^2\sqrt{x^2+z^2}}\right]_{-L}^{L}$$

$$=\frac{\sigma_0 x}{2\pi\varepsilon_0}\frac{L}{x^2\sqrt{x^2+L^2}}$$

[例題1-5] Q[c]の電荷が半径a[m]のリング上に一様に分布している。リングの中心線上の点で中心からz[m]だけ離れた点Rの電界を求めよ.



分布した電荷がそれぞれ点Rに作る電界を加算する

分布密度 $Q/2\pi a$ [c/m] となる。

リング上の微小片長dS
→ 微小片中の電荷

$$\frac{Q}{2\pi a} dS$$

距離

$$r = \sqrt{z^2 + a^2}$$

$$dE \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)} \frac{Q}{2\pi a} ds \times \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$$

最後の項は鉛直成分 $\cos\theta$

これを一周分ベクトル的に加えあわす。

$$E = \int_0^{2\pi a} \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} \frac{1}{2\pi a} ds$$

$$E = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}$$