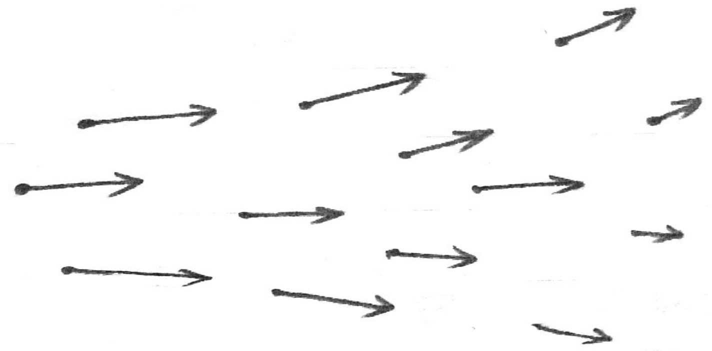
物理学B
第2章　電界とガウスの法則

＜学習のポイント＞
- 電気力線とは何か？
- ガウスの法則の意味するところ
- ガウスの定理を用いた電界の求め方

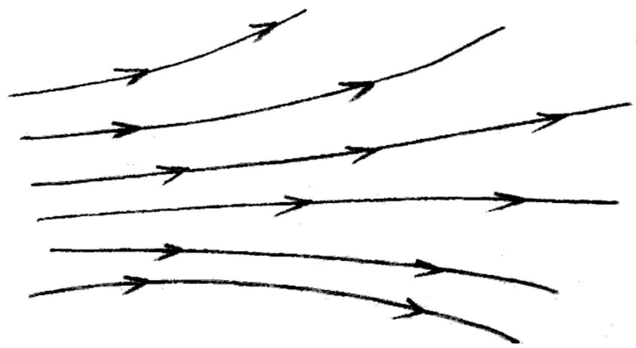
2.1 電気力線

場の表現のしかた

空間の多くの点で、場の強さと方向を表すベクトルを書く



いつもベクトルに接するような曲線を描く



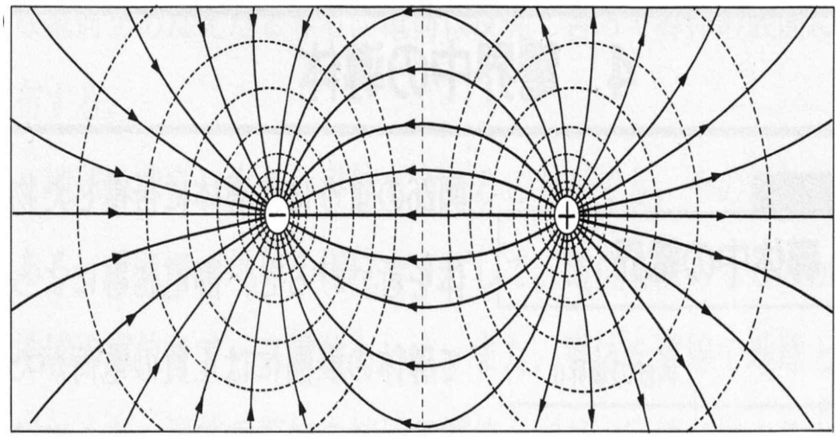
ベクトルの長さを見失うことになるが、その代わりに場が弱い時には曲線はまばらに、場が強い時には蜜に書くという約束で表現できる。

このような線を**電気力線**と呼ぶ

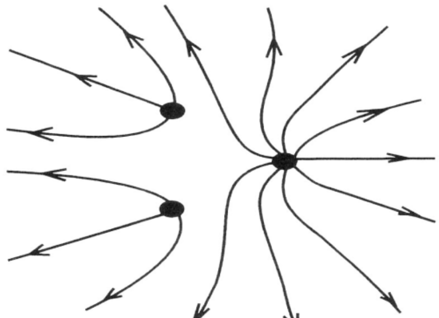
電気力線は電界を直感的に理解するための手法であり、電気力線は実在しない。

■電気力線の特徴

①正の電荷から出て、負の電荷に入る。この他は始点も終点も存在しない。



②電気力線は交わらない。



場の強さを表すために電荷に比例した本数を湧き出させる。

正電荷qからq/ε_0本の電気力線が湧き出すと約束する.

ここで，点電荷を中心にした半径r（表面積$4\pi r^2$）の球面を考える

球面を貫く電気力線の総本数はq/ε_0 [本]となる。

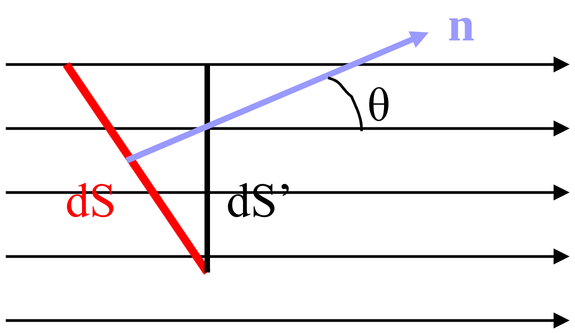
球面上の単位面積当りの電気力線の本数は

$$\boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \Longrightarrow \text{点電荷が作る電界の大きさと一致}$$

すなわち電気力線というものを考えると

電界の向き:　　電気力線の接線

電界の大きさ:　　電気力線の密度



強さ E の一様な電界中の面積 dS を貫く電気力線の本数

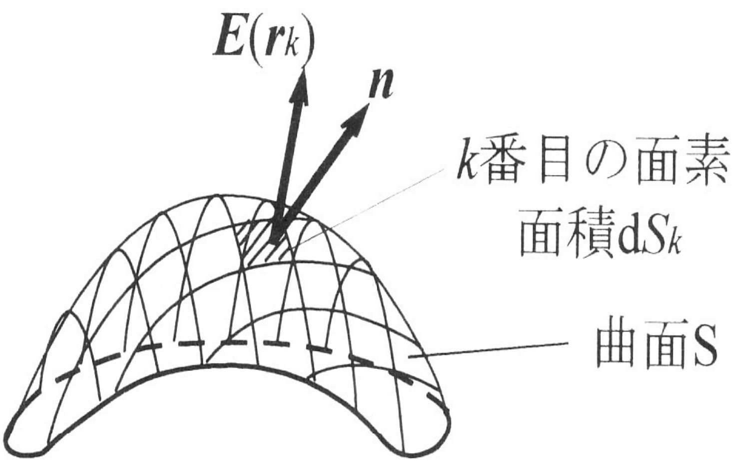
$$dS' = dS\cos\theta$$

dSとdS'を貫く電気力線の数は同じなので

$$EdS' = E\cos\theta dS$$

$E\cos\theta$はdSの面に垂直な電界成分なのでE_nとすると

dSを貫く電気力線の数 $= \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}dS = E_n dS$



面SがEに対して一方向ではない場合(曲面)の考え方

微小面に分けて考える。

各微小面を貫く電気力線の総和は面Sを貫く電気力線の総和に等しい。

Sを貫く電気力線の数 $\iint_S E_n dS$

2.2 ガウスの法則

電荷qを囲む閉曲面を透過する電気力線の総数はq/ε_0

電荷qを囲む閉曲面上の電界は以下の関係式を満たす

$$\iint_S E_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

平曲面内に電荷が複数ある場合は重ね合わせの原理から

$$\iint_S E_n dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ある空間に電荷が一様に分布している場合、単位面積もしくは単位体積当たりの電荷を電荷密度と呼ぶ。

電荷密度ω[c/m^2]が面積Sに分布している場合

$$\iint_S E_n dS = \iint_S \frac{\omega}{\varepsilon_0} dS$$

電荷密度ω[c/m^3]が体積Vに分布している場合

$$\iint_S E_n dS = \iiint_V \frac{\omega}{\varepsilon_0} dV$$

ガウスの定理の応用

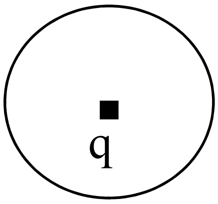
手順1　直感的に電界の方向や大きさのだいたいの様子考える。

手順2　その面の上では電界の大きさは等しく、方向は面に垂直になるような面を見つける。

手順3　この曲面についてガウスの定理を適用する。

2.3 ガウスの定理の応用例

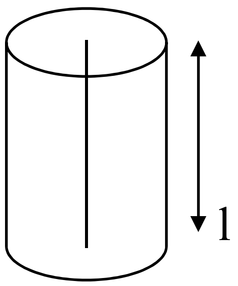
① 点Oに電荷q[c]がある。点Oからr[m]上の電界



放射状に電界は向いていて、等電界面はOを中心とした球面

$$\text{左辺} = 4\pi r^2 |\mathbf{E}|, \text{右辺} = q/\varepsilon_0 \ \therefore\ |\mathbf{E}(r)| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

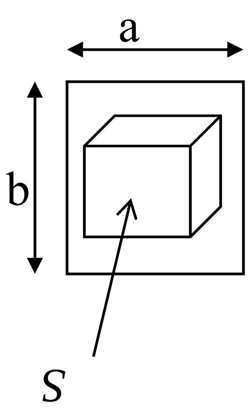
② 直線上に一様な線電荷ρ[c/m]があるとき、直線からr[m]の点の電界（ただし，長さ方向には十分に長いとする）【例題2-3】



放射状の電界，線を中心とした円筒面が等電界面

$$\text{左辺} = 2\pi r l |\mathbf{E}|, \text{右辺} = \rho l/\varepsilon_0 \ \therefore\ |\mathbf{E}(r)| = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

③ a,b[m]を2辺とする平面上(厚さ無視)に電荷密度σ[c/m^2]が一様に分布している。平面からr[m]の点の電界（ただし，a,bはrに比べて十分に大きいとする）【例題2-1】

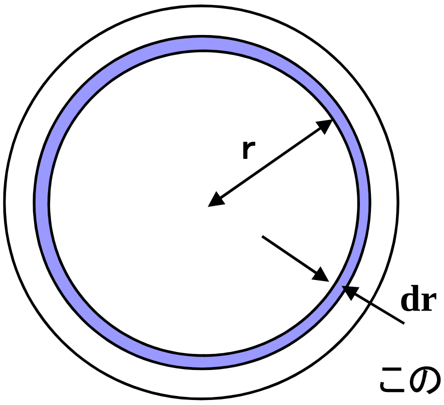


厳密には電界は前面、後面、上面、下面、右面、左面の6つの面から寄与される。しかし厚さが無視できるので前面と後面からの寄与のみを考慮にいれて

$$\text{左辺} = 2S|\boldsymbol{E}|, \text{右辺} = \sigma S/\varepsilon_0 \ \therefore\ |\boldsymbol{E}(r)| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

計算のテクニック：対称性と多重積分の簡単化

（1） 電荷が平面上のある点を中心に軸対称に電荷面密度$\omega(r)$で分布しているときの，半径 a の円に存在する全電荷量．



$$Q = \iint_{\text{円}} \omega(r)\, dS$$

半径rで幅 dr の円環要素の面積$=2\pi r dr$

この円環を足し算することで面積分が計算できる．

$$Q = \int_0^a \omega(r)\, 2\pi r dr$$

$S = \pi r^2 \quad \therefore dS = 2\pi r dr$ の置換積分とも考えられる

（2） 電荷が球対称に密度$\rho(r)$で分布しているときの，半径aの球に存在する全電荷量

$$Q = \iiint_{\text{球}} \rho(r)\, dV$$

（1）の円環の代わりに厚さ dr の球殻を考えると，球殻の体積は $4\pi r^2 dr$

$$Q = \int_0^a \rho(r)\, 4\pi r^2 dr$$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \therefore dV = 4\pi r^2 dr$ の置換積分とも考えられる

【例題2-4】半径 a の球内に一様な電荷密度で電荷が分布している．中心から距離 r の場所での電界の強さはいくらか．全電荷をQとする．

まず，電荷密度を求めると，$\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$

半径 r の点と等電界で電気力線が垂直に交わる閉曲面は，半径 r の球面である．

ガウスの法則 $$\iint_S E_n dS = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

をこの球面に対して適用する．ただし，求めるべき点が球の中か外かで右辺が異なるので場合わけする．

(i) $r < a$

$$\text{左辺} = E(r)\iint dS = E(r) \times \text{球の表面積}$$

$$= 4\pi r^2 E(r)$$

$$\text{右辺} = \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0} dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{r^3}{a^3}\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$ 距離に比例

(ii) $r > a$

$$\text{左辺} = 4\pi r^2 E(r)$$

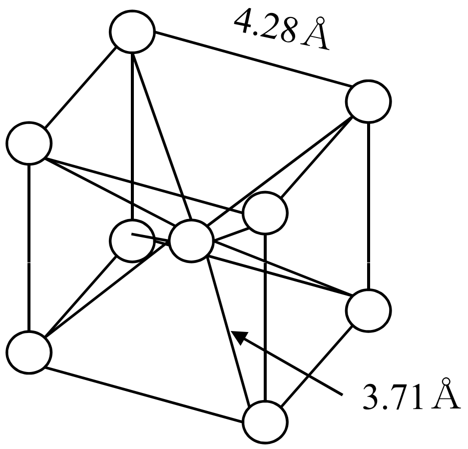
$$\text{右辺} = \int_0^a 4\pi r^2 \frac{\rho}{\varepsilon_0} dr = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 距離の2乗に反比例

２．４　導体と静電誘導

電荷の(－)総電荷量　＝　原子核の(＋)電荷量

Na　　$(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^1$　　r＝2Å



体心立方格子

隅と体心の原子の3s軌道は重なり合う
└▸ 同じ引力を受ける

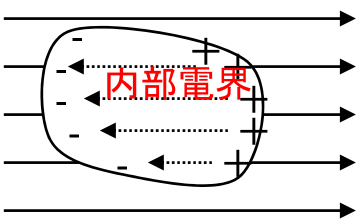
3s電子は、もともとの原子に属することも
隣の原子に属することもできる
└▸ 各原子間を渡り歩く「**自由電子**」

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

Δx →大
Δp →小

電子1個の運動エネルギーが小さくなる
「**金属結合**」

電界中の導体

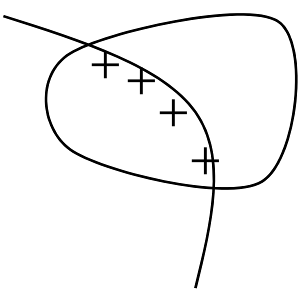


E　外部電界

導体内の電界
＝外部電界　＋　内部電界

──→　0になるまで自由電子は動く「**静電誘導**」
$\tau=10^{-18}$秒

※　表面に現れる電荷は厚みのない表面にたまっている



ガウスの法則　→　電界　→　電荷移動
内部に電荷はたまらない