物理学B

第3章　静電場と電位

＜学習のポイント＞

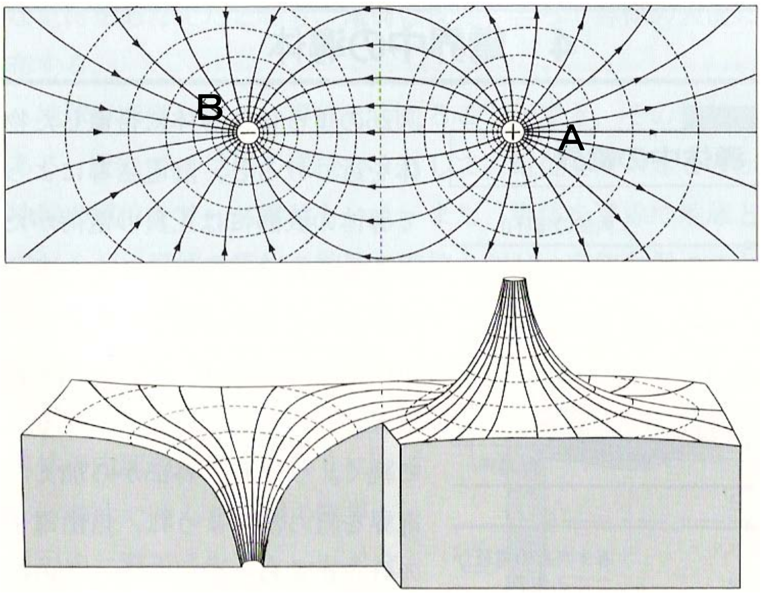
- 電位とは何か
- 電界から電位を求める方法
- 電界に蓄積されるエネルギー

３．１　静電界と電位差

クーロン力　$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

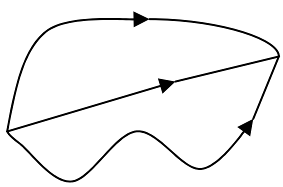
電界中で電荷を動かすと仕事のやりとりがある

重力　→　位置ポテンシャル
電界　→　ポテンシャル「**電位**」



正の電荷をBからAに移す（重力は無視）

電気力線の向き（電界）に逆らっているので、仕事が必要
(山を登るのと同じ)
道筋をどう選んでも、勾配は異なるが、必要な仕事量は同じ
電気力線と垂直方向には仕事をしない



負の電荷B　→　低い電位
正の電荷A　→　高い電位
電位差：　1[C]の電荷を正→負へ移動する時に電界のする仕事量[J]から求める

（微小距離Δsの移動に必要な仕事）＝（移動方向の力成分）×（移動距離）

$$\Delta \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}\,\Delta s$$
$$= 1\cdot \boldsymbol{E}\Delta s \ [\mathrm{c}][\mathrm{V/m}]$$

移動方向成分：$\Delta \boldsymbol{F}_t = 1\cdot \boldsymbol{E}_t$（接線方向ベクトルとの内積）$\Delta s$

３．２　電位

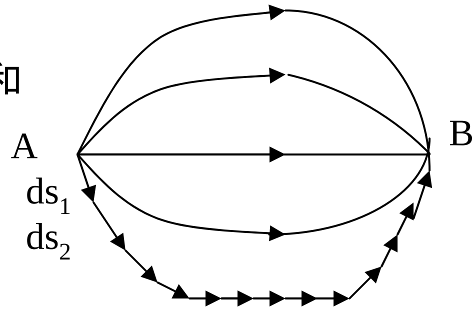
空間的に電界が分布している場合，電位差は

$\phi_A - \phi_B$　（AからBへ単位電荷を移動する時、電界のする仕事）

＝電気力線に沿った微小素線の仕事の総和

$$= \sum_{i=1}^{m} 1 \cdot E_{t_i} ds_i$$

$$\rightarrow \int_A^B 1 \cdot E_t ds$$



図のように　Aが正、Bが負なら

$$\phi_A - \phi_B > 0$$

電位の等しい面：　**等電位面**
電気力線と直交する面の中では仕事のやりとりはない

一般的「**電位**」ϕ　：
無限遠大を0電位とした $\phi(r) - \phi(\infty)$ の電位差を意味する

つまり、1[C]を無限遠方にまで移動する際に電界のする仕事

$$\int_A^{\infty} E_t ds$$

この電位場において，電荷qの電気エネルギーは　$U=q\phi$

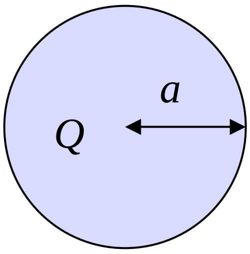
- **点電荷による点電荷から距離 r の点の電位**

$$\phi(r) = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

電位はスカラー量　　代数的な足し合わせができる

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_i^N \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{\rho(r')}{4\pi\varepsilon_0 |r - r'|} dV$$

【例題3-2】　球内外の電位を求める.



まずは，電界分布を求めて，1クーロンを無限遠方まで運ぶ際の仕事量を求める.

ただし，仕事を求める際には，その場所の電界を用いることに注意.

例題2-3から，ガウスの定理を用いて電界は以下のように求められる.

$$r > a \quad E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$
$$r \le a \quad E(r) = Qr/4\pi\varepsilon_0 a^3$$

$r > a$では，電位の定義どおりに

$$\phi(r) = \int_r^\infty 1 \cdot E(r) dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

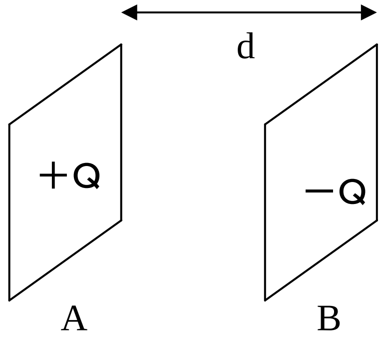
$r < a$ では，球の内外で電界分布の関数が異なるので，区間を分けて積分しなくてはならない.

$$\phi(r) = \int_r^\infty 1 \cdot E(r) dr = \int_r^a \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3} dr + \int_a^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a^3}\left(a^2 - r^2\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

あるいは，$r=a$の電位に，球内の電位差を加えると考えてもいい

３．３　コンデンサー



当然　A→Bに電荷を移動させると電界は仕事をする

電位差　V[V]が生じる

$$Q \propto E \propto V$$

∞平面なら

$$E = \frac{\omega(\text{面密度})}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{(Q/S)}{\varepsilon_0}$$

Sは面積

$$\boxed{Q = CV}$$

C:電気容量　[F　ファラッド]=[C]/[V]

（第一回クイズの解答参照）

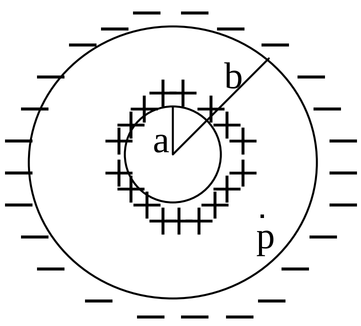
$$V = \phi_A - \phi_B = \int_A^B E ds = \frac{Q/S}{\varepsilon_0} d$$

Eが一定ならV=E×距離

[V]＝[V/m]×[m]

$$\therefore \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

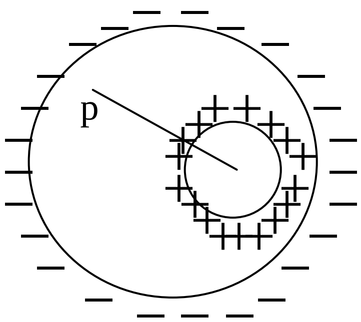
【例題3-3 】



P点

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

対称なので外側の－Qは影響しない



$$E\neq\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

－Qの影響が入ってくる
（半径rの球が等電界面ではないので
　同じようにガウスの法則は使えない）

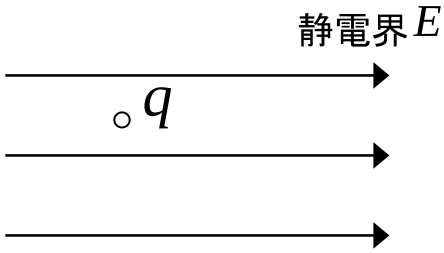
$$V=\int_a^b E(r)dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{(1/a)-(1/b)}$$

$$b\to\infty \qquad C=4\pi\varepsilon_0 a$$

孤立した導体球も1つのコンデンサー（～700μF）

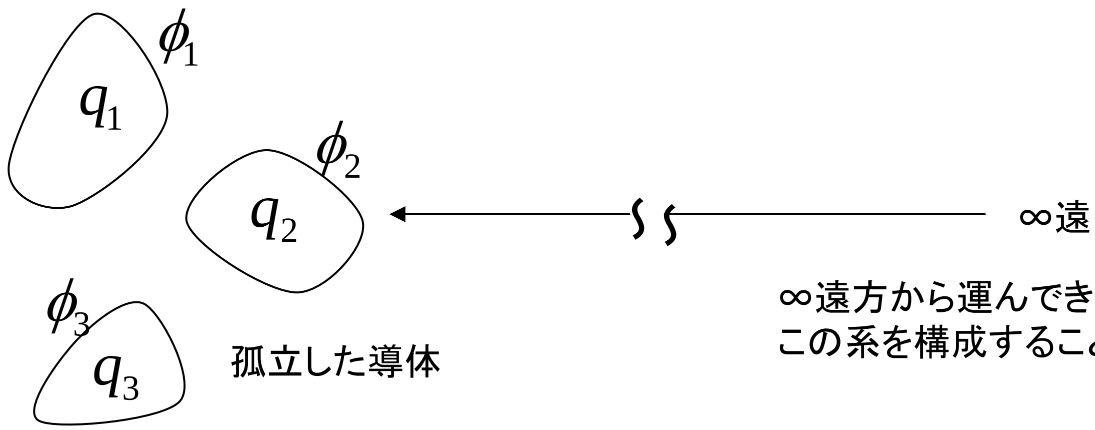
３．４　帯電エネルギー



$$F = qE$$

仕事をされる → 電位（1[C]への仕事）

電界中に電荷が存在している場合，
静電界中に蓄えられているエネルギーを定義できる



∞遠方から運んできて
この系を構成することを考える

Step No.1　最終状態の$1/k$ の電荷を導体に運ぶ
最初，導体は0電位

電界＝0と近似できる環境中で
電荷を運ぶ

Step No.2　各導体の電位は ϕ_1/k，　ϕ_2/k，$\cdots$　　に増加する
ここに q_1/k，　q_2/k を運ぶ

Step 1で運んだ電荷が作る一定の電界と
近似できる環境中で電荷を運ぶ

仕事＝（電位）×（電荷）

$$\frac{\phi_1}{k}\times\frac{q_1}{k},\ \frac{\phi_2}{k}\times\frac{q_2}{k},\ \cdots$$

k 回までに要する仕事U

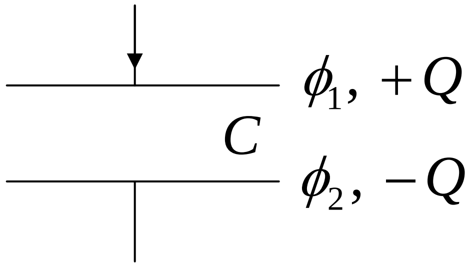
$$U = \sum_{i=1}^{n}\left\{0\times\frac{q_i}{k}+\frac{\phi_i}{k}\times\frac{q_i}{k}+\frac{2\phi_i}{k}\times\frac{q_i}{k}+\cdots\right\} = \frac{k-1}{2k}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i$$

実際には，運んでくる電荷によっても電界は変化するので，その変化がないとするには
各回に運ぶ電荷量が極限的に小さければいい

$$k \to \infty \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i$$

帯電エネルギー[J]

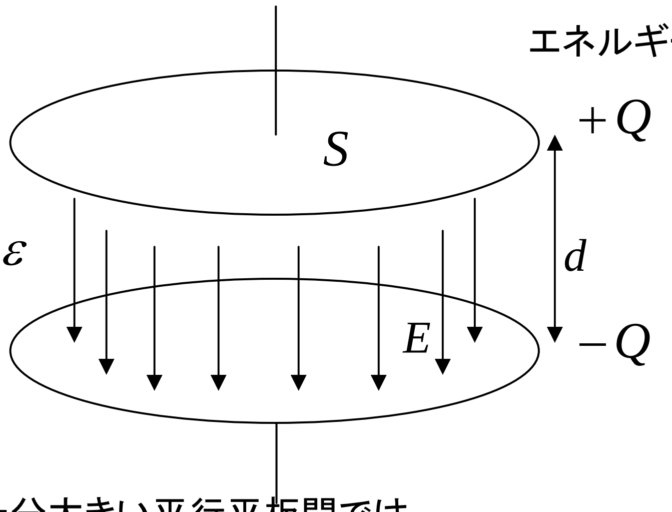
例



$$U=\frac{1}{2}\left(\phi_1 Q-\phi_2 Q\right)$$

$$=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

3．5　静電エネルギー



エネルギー$U=\frac{1}{2}QV$

$|E|d=V$

$Q=\omega S$　　　ωは電荷面密度[C/m^2]

$$\therefore U=\frac{1}{2}(\omega S)\times(Ed)=\frac{1}{2}\omega SEd$$

十分大きい平行平板間では

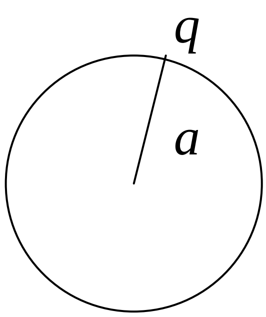
$E=\frac{\omega}{\varepsilon_0}$　なので単位体積あたりのエネルギー密度 $u\left(J/m^3\right)$

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

静電エネルギー密度 [J/m^3]

コンデンサの帯電エネルギーは電界のエネルギーとして極板間に蓄えれていると
みなすこともできる.（2種類のエネルギーがあって，全体で2倍ではない）

【例題3-4 】



$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$U=\frac{1}{2}q\phi=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\quad /\!/$$

$$\int_a^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$　（一致する）