物理学B，D
第4章　電流と抵抗

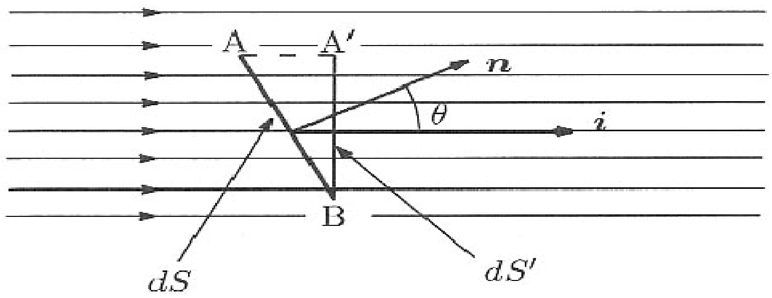
＜学習のポイント＞
- 電流密度（ベクトル）による電流の表現
- 電流と電荷変化量の対応
- 微視的なオームの法則
- 微分方程式の応用

4．1　電流密度

- 金属中の自由電子の流れ　　[伝導電流]

- 電流 I；　真電荷の流れ　　　方向 は電子の流れと逆
  1[A]=　ある断面を1秒間に1[C]流れる

- 電流密度　$\boldsymbol{i}$[A/m^2]　ベクトル量

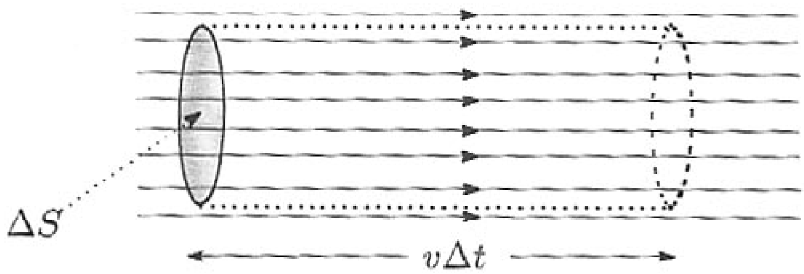


- 1章において，dSを貫く電気力線の数は，　$E\cos\theta\cdot dS=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}ds$ (方向ベクトルとの内積)と書けた．

  同様にdSを通る電流 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}dS$ $(=i_n dS)$

- iの大きさや向きが場所によって変化する場合、電流は　$I=\iint i_n dS$

- 一定の場合　$I=iS$

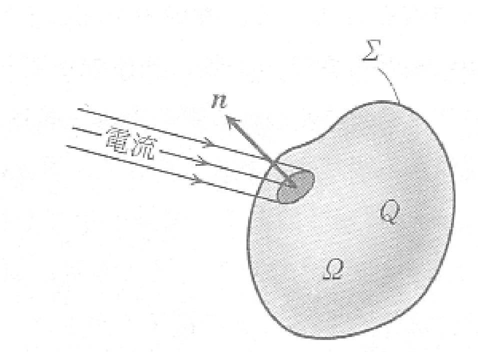


ρ_e $[c/m^3]$; 電荷密度
$v[m/s]$電荷の速さ

速度vで移動している密度ρ_eの電荷の流れを考えるとき，時間Δtに断面積ΔSを通過する電荷量は，$\rho_e v\Delta S\Delta t$.

$$\boldsymbol{i}=\rho_e\boldsymbol{v}$$

４．２　電荷保存と定常電流



ある任意の閉曲面Sで囲まれた領域に
電流が流れ込んでいる．

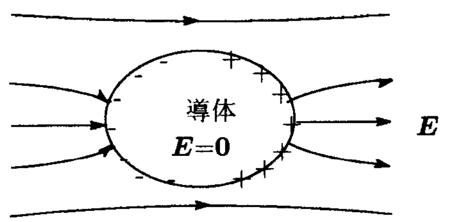
流れ込んでいる電流は，閉曲面の面の法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$とすると，$\boldsymbol{n}$は面の外側に向かってとるので，

$$-I=-\iint_S i_n dS$$

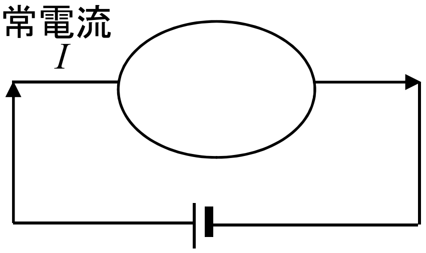
この電荷の流入は，単位時間当たりの閉曲面内の電荷の増加に等しいので，
その増加の割合を微分で表現すると

$$\frac{dQ}{dt}=-\iint_S i_n dS=-I$$

電界中に置かれた孤立した導体では，2章で学んだように



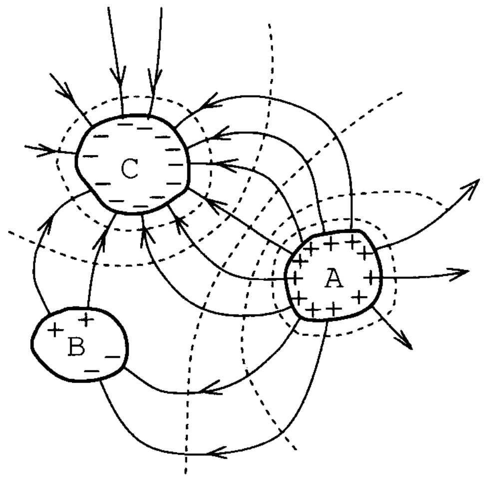
静電誘導の結果，導体内には電界は生じない．したがって，導体に定常的な電流を流すには，外部から電荷の流入と，外部への電荷の流出経路を確保しなくてはならない．



時間変化のない電流〔**定常電流**〕

$$\frac{dI}{dt}=0$$

$$\therefore \iint_S i_n dS=0$$



導体 A, B, C を抵抗体の中に浸すと，電気力線は，そのまま電流密度の方向になる.

定常電流が導体棒を流れている

太さ一定の導体棒

$$\iint i_n \, dS = \int_A i_A \, dS + \int_{側面} i_n \, dS + \int_B i_B \, dS = 0$$

半径方向に電流成分があると、その電流によって表面に電荷が溜り、反電界ができて、その半径方向の電界成分を打ち消すので，電流は長さ方向のみを向く.

$$\int_{側面} i_n \, dS = 0$$

$$\therefore \quad -i_A S + i_B S = 0$$

$$i_A = i_B$$

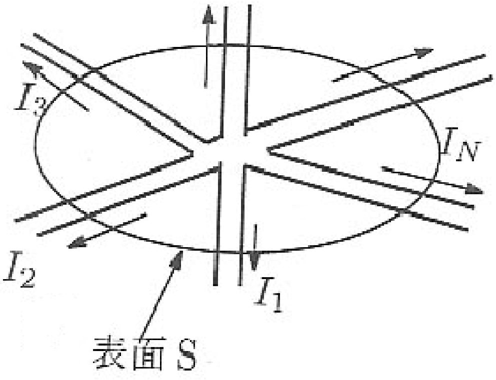
電流密度の大きさ、電界はいたるところで一定

キルヒホッフの第1法則

電流は湧き出さない

ある節点に注目したとき,

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_N = 0$$



注）方向を無視しないこと. この図は電流がすべて出て行く方向であるが,
節点に入ってくる電流があったら, その場合はマイナスの符号をつけて加える

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = 0$$

4．3 オームの法則

$$V = IR, \quad I = \frac{V}{R}$$

R:電界に沿って動く電荷を妨げる.

■局所的なオームの法則

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}$$

<u>流れる電流密度はその座標の電界に比例する</u>

σ: 物質の導電率 [S(ジーメンス)/m]
ρ: 電気抵抗率　1/σ [Ωm]　$R=\rho\,(l/S)$

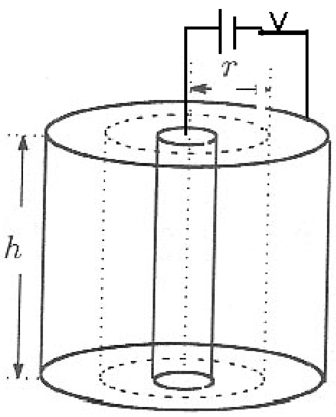
半導体の中にはマクロに見て成り立たないものもある。これは導体と導体の界面の振舞によるもので物質中では局所的には成立する。

【例題　4-1 】　　iの方向、分布が(等しい面)を考える。電気力線は放射状.

↓

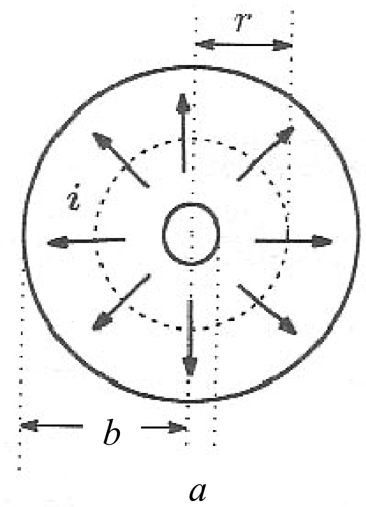
円筒面

$$V \Leftrightarrow \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \rho\, i$$
$$I = \iint \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = i\iint dS$$



$$I = 2\pi r h i\,(r)$$

$$E(r) = \frac{i(r)}{\sigma} = \frac{I\rho}{2\pi r h}$$



$$V = \int_a^b E\,(r)\,dr = \frac{\rho I}{2\pi h}\ln(a/b)$$
$$\therefore\ I = \frac{2\pi h V}{\rho\ln(a/b)}$$

$$\ln x = \log_e x$$

4．4 ジュール熱と起電力

■[電力] $P = I \times V = I^2 R[\mathrm{W}],[\mathrm{J/s}]$

電位差 IR[V]
1秒間当たりに運ぶ電荷 I[C]
電界のする仕事 $I^2R=IV$[J/s]

■[電力量] $Pt = IVt\,[\mathrm{J}],[\mathrm{kWh}]$

局所的に，体積あたりの電力は
その座標での電界と電流密度の
内積で与えられる

$$p = \mathbf{E} \cdot \mathbf{i} = \rho i^2 = \sigma E^2$$

【例題4-2 】(例題4-1の続き）

発生するジュール熱量を求める.

$$I = \frac{2\pi hV}{\rho \ln(a/b)}$$

$$P = RI^2$$

$$P = VI \quad (easy)$$

$$P = \frac{2\pi hV^2}{\rho \ln(a/b)}$$

各場所で発生している電力の和と一致することを確かめてみる

$$i \rightarrow p \underset{\text{体積積分}}{\Rightarrow} P$$

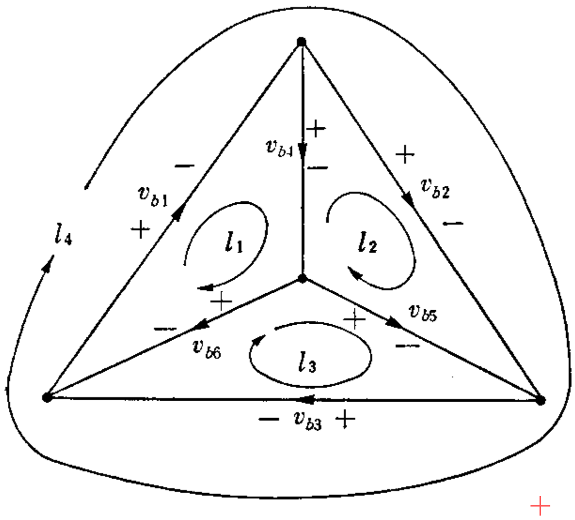
$$p(r) = \rho i^2(r) = \rho\left(\frac{I}{2\pi rh}\right)^2$$

$$P = \int_b^a p(r)\, 2\pi rh\, dr$$

$$= \frac{\rho I^2}{2\pi h}\int_a^b \frac{1}{r}dr = \frac{\rho I^2}{2\pi h}\ln(a/b) = \frac{2\pi hV^2}{\rho \ln(a/b)} \leftarrow V \times I$$

＜キルヒホッフの第2法則（電圧即）＞

任意の１つの閉路についてその向きを考えたとき，閉路に沿って一巡するときに各枝の電圧の代数和は0.

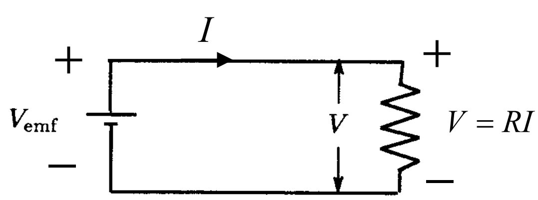


＋ → − の方向を正として加算

閉路 l_1を例にとると $v_{b1}+v_{b4}+v_{b6}=0$

vは．電池でも同じ

一番簡単な例は，



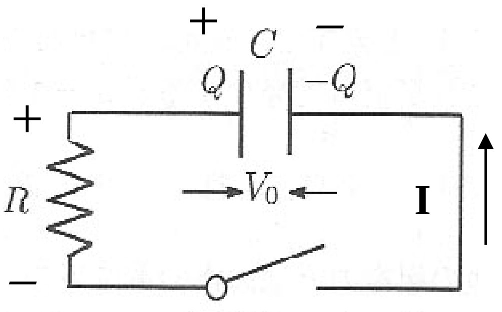
電池の起電力

$$-V_{emf}+RI=0$$

【例題4-3】

$I = V/R$

$Q = CV$



キルヒホッフの第2法則から $RI - \dfrac{Q}{C} = 0$

$$I = \frac{Q}{CR} \quad \text{—①}$$

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad \text{—②}$$

①,②より $\dfrac{dQ}{dt} = -\dfrac{Q}{CR}$

変数分離型の微分方程式の解き方は p.56

$$\frac{1}{Q}dQ = -\frac{1}{CR}dt$$

$$\ln Q = -\frac{t}{CR} + A \quad \therefore Q(t) = A' \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$$

$t = 0$で$Q_0 = CV_0$を用いて

$$Q(t) = CV_0 \exp(-t/CR)$$

CR: 時定数

②から $I(t) = \dfrac{V_0}{R} \exp(-t/CR)$

解の形は覚えてしまおう

∞秒までの間に発生するジュール熱

$$\int_0^\infty RI^2 dt = \frac{1}{2}CV_0^2$$

最初にコンデンサに蓄えられていたエネルギーが抵抗でジュール熱として消費される