物理学B，D
第5章　ガウスの法則と静電場の微分形

<学習目標のポイント＞

①積分公式「ガウスの法則」を空間の各座標点で成り立つ微分型の公式と等価であることを理解する

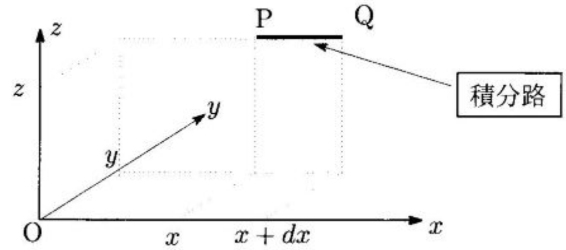
②演算子divを理解する

③各座標で成り立つ，電荷密度と電位の式　「ポアソン方程式」の利用方法を理解する

④電位の特殊解放である「鏡像法」を理解する

５．１電界勾配の微分表示

電界は電位の勾配



$\mathbf{E} \xrightarrow[\text{積分}]{} \phi$　　　$\phi \xrightarrow[?]{} \mathbf{E}$

xにおける　電界E_x
電位φ_x　$\longrightarrow$　x+dx

E_xの変化が無視できる位微小なdx

E_xはx方向が正の方向
$\rightarrow$ x はx+dx よりも電位が高い

電位の変化

$$\phi_{x+dx} = \phi_x + d\phi$$

$$= \phi_x - E_x dx$$

$$d\phi = -E_x dx$$

$$\therefore E_x = -\frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x}$$

同様に

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

各成分を単位ベクトルを用いて足し合わせると、

$$\mathbf{E} = \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right\}$$

$\rightarrow \underline{-grad\phi}$　Φの勾配：ベクトル量　　　電界が電位の下り勾配

点電荷

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

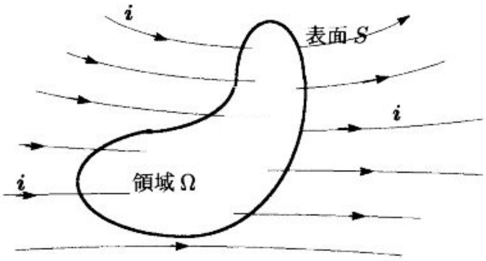
$$E(r) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

詳細はp.69

５．２　電流の発散と連続の方程式　（教科書では5.5の内容）

定常電流において，任意の閉曲面に入り込む電流密度のベクトル総和は流出するベクトル総和と必ず一致することから，電流連続の方程式として

$$\iint i_n dS = 0 \qquad (4.5)$$

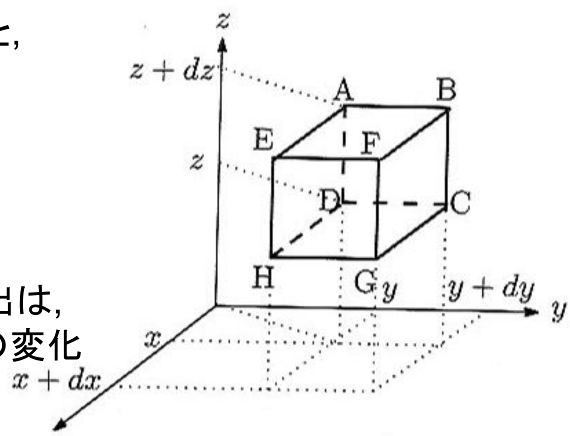


<u>この式の意味するところを下図の座標(x,y,z)近傍の微小体積で表現してみよう．</u>

内部電荷密度 ρ[c/m^3]

電流密度$\boldsymbol{i}(i_x,i_y,i_z)$が空間的に変化しているとすると，
x=0 の z-y平面で i_xとすると、x=dx 面上では

$$i_x + \left(\frac{\partial i_x}{\partial x}\right)dx$$



従って、ABCD面,EFGH面からの電流密度の流出は，
dydx 平面が微小でその面内でのi_x 電流密度の変化が無視できると仮定して，

$$-i_x dydz + \left(i_x + \left(\frac{\partial i_x}{\partial x}\right)dx\right)dydz = \left(\frac{\partial i_x}{\partial x}\right)dxdydz$$

＊ABCD面の方位ベクトルnはx 軸負の向きなのでマイナスの符号がつく
＊dx が小さいので，ABCD, EFGH面上でのi_x も同じでないか？

他の4面についても同様に考えると

$$\iint i_n dS = \left(\frac{\partial i_x}{dx} + \frac{\partial i_y}{dy} + \frac{\partial i_z}{dz}\right)dxdydz = 0$$

$$\therefore \frac{\partial i_x}{dx} + \frac{\partial i_y}{dy} + \frac{\partial i_z}{dz} = 0, \quad \frac{\partial i_x}{dx} + \frac{\partial i_y}{dy} + \frac{\partial i_z}{dz} \text{を } div\ \boldsymbol{i} \text{と書く}$$

あるベクトルの3成分をそれぞれの成分の方向に微分したものの和：

“ベクトルの発散”　　（スカラー量であることに注意）

(注意）$grad\ \ \phi = \frac{\partial \phi}{dx}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{dy}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{dz}\mathbf{k}$ と区別すること

つまり，定常電流での連続の方程式は，

$$\boxed{div\ \boldsymbol{i} = \frac{\partial i_x}{dx} + \frac{\partial i_y}{dy} + \frac{\partial i_z}{dz} = 0}$$

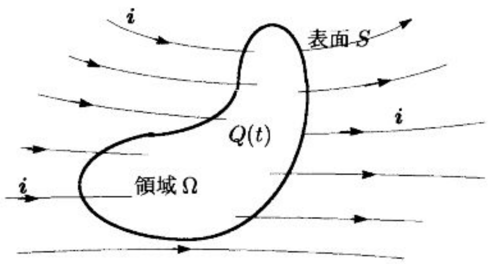
出発は，積分型の(3.6)式であったので，物理的意味は全く同じ.
ただし，(3.6)の積分型の式は，３次元空間で任意の閉曲面を定義して成り立つ式.
上式は，各座標点で成り立つ式.

$$div\boldsymbol{i} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\iint_S i_n dS}{\Delta V}$$

各座標での，単位体積、時間当たりの電流の湧き出しに対応する。

コンデンサーにたまっていた電荷が放電するような過度系では，電荷保存
が成り立つので，

$$\iint i_n dS = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint \rho(t) dV \qquad (3.4)$$



$$\iint i_n dS = -\iiint \frac{d\rho}{dt} dV$$

ある座標点周囲の微小体積を考えると，前述のようにして，左辺は,($div\boldsymbol{i}$)$dxdydz$.
右辺は，その座標での電荷密度と体積$dxdydz$で書ける.

$$(div\ \boldsymbol{i})\, dxdydz = -\frac{d\rho}{dt} dxdydz$$

$$\boxed{\therefore\ div\ \boldsymbol{i} = -\frac{d\rho}{dt}}$$

電荷が存在する場合の連続の方程式

５．３　電界の発散とガウスの法則

ガウスの定理　$\iint E_n dS = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} = \iiint \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} dV$

閉曲面での電気力線の総出射数＝閉曲面内の電気力線の総湧き出し量

7.1の証明で$\boldsymbol{i}\rightarrow\boldsymbol{E}$（電流密度ベクトル→電気力線）とすると、任意の座標点周囲の微小体積では

$$\iint \mathrm{E}_n dS = \left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz}\right) dxdydz$$

$$(div\ \boldsymbol{E})\, dxdydz = \frac{\rho}{\varepsilon_0} dxdydz$$

$$\boxed{\therefore\ div\ \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

単位時間、体積当たりの電気力線の湧き出し

微分型のガウスの法則

微分型ガウスの法則の使用方法

【例題5-2】　$E\rightarrow\rho$の問題

厚さdの板の中心を原点としたとき，板の内部の電界分布が以下のように与えられた.

$$E_x = k(x^2 - d^2/4)$$

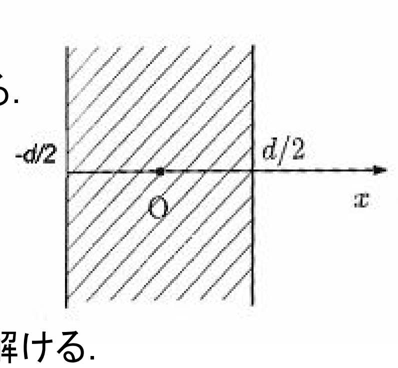
無限にの時、板の中の$\rho(x)$を求める。ただし$E_y, E_z = 0$

解

単純に$div\ \boldsymbol{E}$を計算するだけ

$$\rho(x) = \varepsilon_0 div\ \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 2\varepsilon_0 kx$$

【例題5-3】　$\rho \to E$ の問題



無限に大きい厚さd の平面に電荷が均一に分布している.
厚さの中心を原点として電界分布を求める.
ただし, $E_x(x=0) = 0$

解

(1)対称性が良ければ $\iint E_n dS = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$ でも解ける.

$$\iint E_n dS = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV \text{ で解くと }, \quad x = 0 \text{ で } E = 0 \text{ なので}$$
$$-d/2 \le x \le d/2 \text{ では }, \quad S \cdot 0 + SE_x = (\rho/\varepsilon_0) xS$$
$$\therefore E_x = \rho x / \varepsilon_0$$
$$x > d/2, \text{ では }, \quad S \cdot 0 + SE_x = (\rho/\varepsilon_0)(d/2)S$$
$$\therefore E_x = \rho d / 2\varepsilon_0$$
$$x < -d/2 \text{ では }, \quad S \cdot 0 - SE_x = (\rho/\varepsilon_0)(d/2)S$$
$$\therefore E_x = -\rho d / 2\varepsilon_0$$

(2) $div\ \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$ で微分方程式を解いて求める.

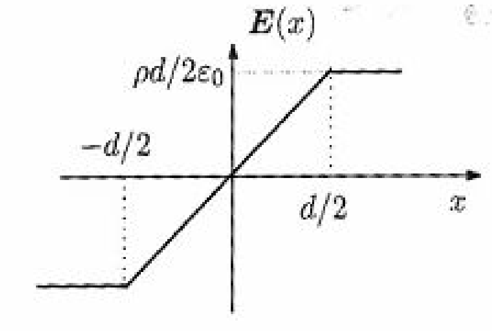
無限平面なので $E_y = E_z = 0$ より

平面内では $\quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \to \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$dE_x = \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx$$
$$E_x = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x + A \text{ (積分定数)}$$
$$x = 0 \text{ で } E_x = 0 \text{ より } A = 0$$

平面外では $\quad \rho = 0$ より $, \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

よって $\quad E_x = B$ (定数)となる。



$$E_x = \rho d / 2\varepsilon_0 (x > d/2)$$
$$E_x = -\rho d / 2\varepsilon_0 (x < -d/2)$$

５．４　ポアソンの方程式とラプラス方程式

静電界（時間に依存しない）においては,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\,grad\ \ \phi \\ div\ \boldsymbol{E} &= \rho\ /\ \varepsilon_0 \end{aligned} \longrightarrow \quad div(grad\,\phi) = -\rho/\varepsilon_0$$

$$grad\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k} = (grad\,\phi)_x\boldsymbol{i} + (grad\,\phi)_y\boldsymbol{j} + (grad\,\phi)_z\boldsymbol{k}$$

$$\Delta\phi = div(grad\,\phi) = \frac{\partial(grad\,\phi)_x}{\partial x} + \frac{\partial(grad\,\phi)_y}{\partial y} + \frac{\partial(grad\,\phi)_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Δ:ラプラシアン演算子 (∇^2と書くこともある)

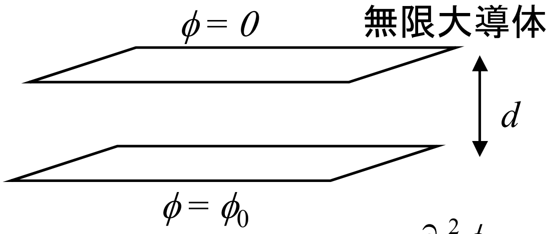
まとめると

$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$　ポアソン方程式

$\rho = 0$の場合のみ　　$\Delta\phi = 0$　ラプラス方程式

各座標で成り立つ式

【例題5-4】



$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0 \ \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0\right)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0,\ \frac{d\phi}{dx} = A,\ \phi = Ax + B$$

$x = 0$で $\phi = \phi_0$より　$B = \phi_0$

$x = d$で $\phi = 0$より　$A = -\phi_0/d$

$$\therefore\ \phi = \frac{\phi_0}{d}x + \phi_0$$　（答え）

５．５ 鏡像法

電荷の位置、量→電位分布を求める

クーロンの法則： 単なる電位のスカラー和の計算

数値的積分

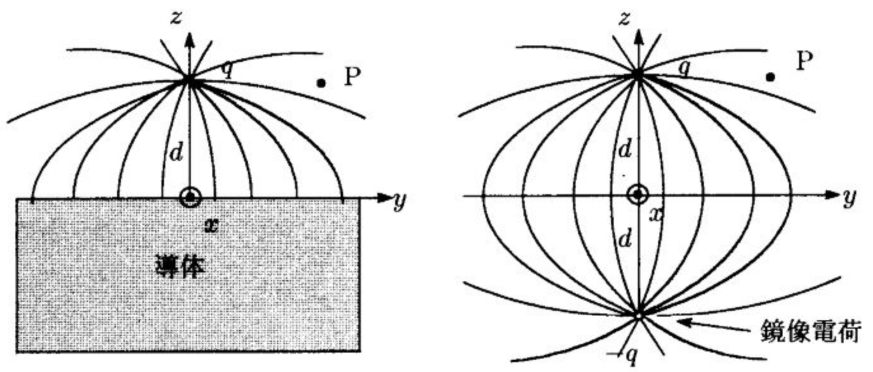
一方，導体が存在し、その上での電荷分布は不明で、ポテンシャルϕの値が決まっている場合のそれ以外の空間のϕ分布を求める場合。

すなわちポアソン方程式で与えられる偏微分方程式をある境界条件で解くことに対応

↓

難しい

特殊解法： <u>無限に広い平面の導体がある時</u>に使われる鏡像法



点電荷qと反対の符号の電荷が導体表面の点電荷の近いところに吸い寄せられ（静電誘導）、導体表面で同電位を実現する。その結果，平面内では電界は無いので，電気力線は平面に垂直に飛び込む.

$\phi=0$ の導体の代わりに、$+q$と対象位置に$-q$の電荷を考えることは電気力線分布，および導体表面の電位(=0)から等価である。

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right)$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\right|^3}-\frac{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0}{\left|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0\right|^3}\right)$$

ただしこの式は導体外($x>0$),導体面($x=0$)で成り立つが、導体内($x<0$)では成り立たない。$x<0$では$\phi=0$

また，この式はq のある点以外では$\Delta\phi=0$を満足するのは当然

鏡像力

点電荷q と平面導体間の力は，点電荷q と鏡像電荷-q の間に働くクーロン力に等しい．

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2d)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

引力が働く