創想館　14-201

2008-11

Tuesday　SPRING

13:00－14:30

2008年度

「情報工学」

第11回講義

前回学んだこと

復 習

- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘マルコフ過程の符号容量’について学んだ.

☞ 文字間の遷移に制約がある場合の符号容量

➤ エントロピーは，マルコフ過程で考えると低下する.
同様に，マルコフ過程で考えると，符号容量も低下する.

- マルコフ過程の符号容量を求めるには，文字数が2つなら2つの差分方程式，文字数が3つなら3つの差分方程式・・・を連立して解くことになる.
- 授業中に扱った程度の簡単な問題なら，必ず解けるようにしておくこと！

ANIMATION

前回学んだこと

復 習

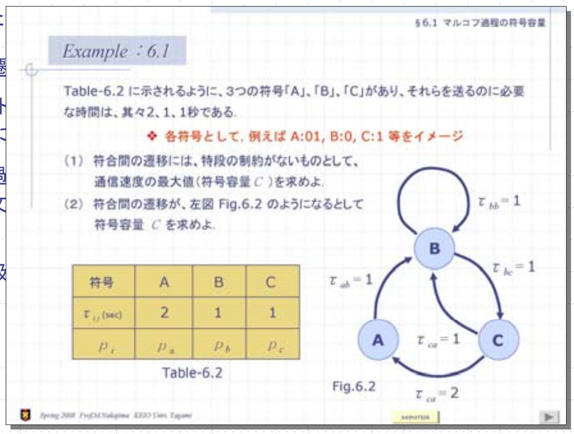
- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘マルコフ過程の符

☞ 文字間の遷

➤ エント
同様に

- マルコフ過
方程式，文
とになる.
- 授業中に扱
こと！


§6.1 マルコフ過程の符号容量

Example：6.1

Table-6.2 に示されるように、3つの符号「A」、「B」、「C」があり、それらを送るのに必要な時間は、其々2、1、1秒である.

❖ 各符号として，例えば A:01, B:0, C:1 等をイメージ

（1） 符合間の遷移には、特段の制約がないものとして、通信速度の最大値（符号容量 C ）を求めよ.

（2） 符合間の遷移が、左図 Fig.6.2 のようになるとして符号容量 C を求めよ.

符号	A	B	C
τ_{ij} (sec)	2	1	1
p_i	p_a	p_b	p_c

Table-6.2

Fig.6.2

§ 6.2　誤りがある場合の符号容量

■ これまでに学んできたこと

$$H \longrightarrow R \xrightarrow{max} C$$
$$R = H / \tau$$

■ ここで、エントロピーは ・・・

$$H = -\sum p_i \log_2 p_i$$

☞ 通信路で誤りが生じると ・・・

➡ $H' = H(x) - H(x/y) = H(y) - H(y/x)$

■ 符号容量は・・・

$$C = R_{max}$$

☞ したがって，通信路で誤りが生じた場合の符号容量は ・・・

➡ $C' = R'_{max} = \left(\frac{H}{\tau}\right)'_{max}$ ・・・となるものと考えても良いのではないでしょうか？

☞ したがって，通信路で誤りが生じた場合の符号容量は ・・・

➡ $C' = R'_{max} = \left(\frac{H}{\tau}\right)'_{max}$ ・・・となるものと考えても良いのではないでしょうか？

$$\Rightarrow \left(\frac{H'}{\tau'}\right)_{max}$$

ここで分子は

$$H' = H(x) - H(x/y)$$

で良い． ・・・ しかし、分母の τ' をどう扱うかは問題！

⇨ 誤りがある系で，$\tau = \sum p_i \tau_i$ を考えることは意味がない．

⇨ よって，

誤りがある場合には，$\tau = 1$ とすることになった．

すなわち，以降，誤りがある場合の符号容量を求めるには，

$$C' = R'_{max} = \left(\frac{H}{\tau}\right)'_{max} = \frac{(H'_{max})}{1} = \{H(x) - H(x/y)\}_{max}$$

を計算することになる．

したがって，

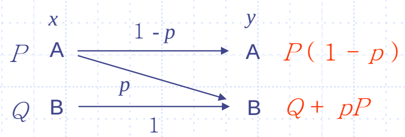
$$\frac{\partial\{H(x) - H(x/y)\}}{\partial p_i} = 0$$

を与える p_i を求めて上式に代入することにより、誤りがある場合の符号容量 C' を求めることになる．

では，例によって，具体的な問題（例題）を解いてみよう．

Example：6.2.1

２つの文字「Ａ」,「Ｂ」を送る装置がある．しかし，雑音の影響で文字「Ａ」の方は，確率 p だけ誤り，受信側で「Ｂ」となってしまう．各文字「Ａ」,「Ｂ」の生起確率を，それぞれ P, Q として，この系の符号容量を求めよ．

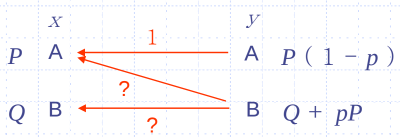


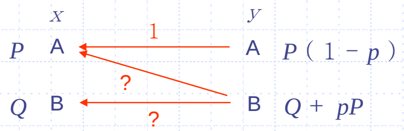
［解］

$$P + Q = 1$$

$$H(x) = -P\log_2 P - Q\log_2 Q$$

$$H' = H(x) - H(x/y)$$





$$p(x_A/y_A)=1,\quad p(x_B/y_A)=0$$

$$p(x_B/y_B)=\frac{Q}{pP+Q},\quad p(x_A/y_B)=\frac{pP}{pP+Q}$$

よって，

$$H(x/y)$$

$$=-\underbrace{p(y_A)}_{P(1-p)}\{\underbrace{p(x_A/y_A)}_{1}\log_2\underbrace{p(x_A/y_A)}_{1}+\underbrace{p(x_B/y_A)}_{0}\log_2\underbrace{p(x_B/y_A)}_{0}\}$$

$$-\underbrace{p(y_B)}_{Q+pP}\{\underbrace{p(x_A/y_B)}_{\frac{pP}{pP+Q}}\log_2\underbrace{p(x_A/y_B)}_{\frac{pP}{pP+Q}}+\underbrace{p(x_B/y_B)}_{\frac{Q}{pP+Q}}\log_2\underbrace{p(x_B/y_B)}_{\frac{Q}{pP+Q}}\}$$

各生起確率および遷移確率値を代入して整理すると，

$$H(x/y)=\cdots\cdots$$

$$=-Q\log_2\frac{Q}{pP+Q}-pP\log_2\frac{pP}{pP+Q}$$

τ = 1 とすることにしたわけであるから，

$$R'=H'=H(x)-H(x/y)$$

$$=-p\log_2 P-Q\log_2 Q$$

$$+Q\log_2\frac{Q}{pP+Q}+pP\log_2\frac{pP}{pP+Q}$$

この式を最大化して，R_{max} を求めることに帰着．

そのための一手法として，**‘ラグランジェの未定係数法’**を用いることにする．

'ラグランジェの未定係数法'

ある条件下で，ある関数を最大化する手法！

ある条件下 → $P+Q=1$　　ある関数 → R'

すなわち本課題では，$P+Q=1$ なる条件下で，$R' = H(x) - H(x/y)$ の最大化を図る．

そのため，次のような式を考え，その最大化を図る．

$$U = \boxed{H(x) - H(x/y)} - \lambda(P+Q-1)$$

where：任意の定数

$P+Q=1$

$\therefore\ P+Q-1=0$

これは，$R' = H(x) - H(x/y)$ の最大化を図ることと同じ！

では早速，$\dfrac{\partial U}{\partial P} = 0$，$\dfrac{\partial U}{\partial Q} = 0$ を与える，P，Q を求めてみよう．

§6.2　誤りがある場合の符号容量

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0$$

変形すると $\boxed{-1 - \log_2 P + p\log_2 \dfrac{pP}{pP+Q} + \lambda = 0}$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = 0$$

変形すると $\boxed{-1 - \log_2 Q + p\log_2 \dfrac{Q}{pP+Q} + \lambda = 0}$

但し、$P+Q=1$

これらを連立させて，P，Q を求める！・・・結果のみを示すと・・・

$$P = \frac{1}{1 - p\left(1 - p^{\frac{1}{1-p}}\right)} \qquad Q = 1 - \frac{1}{1 - p\left(1 - p^{\frac{1}{1-p}}\right)}$$

すなわち，２つの文字「Ａ」､「Ｂ」の生起確率 P と Q が上式で与えられた時，この通信路の通信速度は最大となる．
したがって，これらの式を $H(x)-H(x/y)$ に代入すると $C' = R'_{max}$ が求まることになる．
以下に，その結果のみを示すと・・・

$$C' = \log_2\left\{1-p\left(1-p^{\frac{1}{1-p}}\right)\right\} - p\log_2 p^{\frac{1}{1-p}} \quad (bit/sec)$$

各所の計算は，各自試しておいて下さい．

Example：6.2.1

前問で，$p=1/4$ とした場合の符号容量は，誤りが生じない場合に比べてどのくらい低下するか，調べてみよう．

宿題！

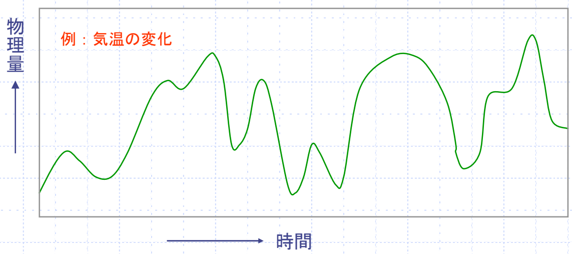
§７　連続的情報源の情報量

§7.1　はじめに

・これまでは，「離散系」での話であった．

しかし，自然界の現象は「連続的」！

例えば，

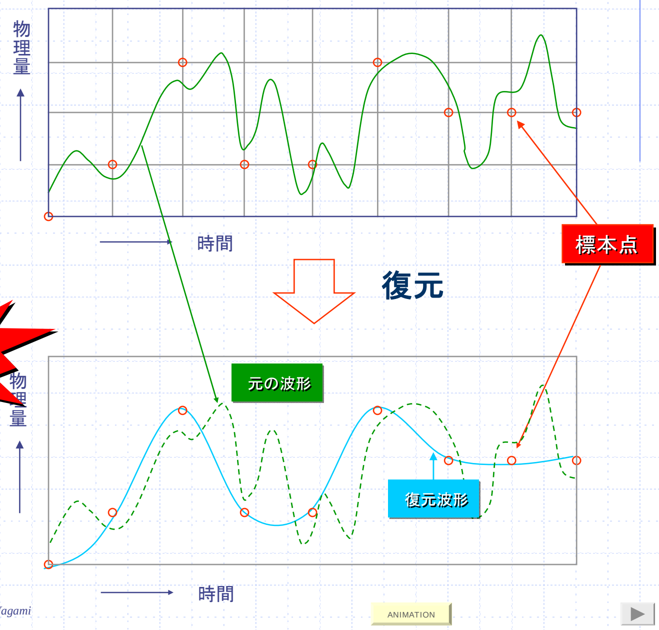


この波形をパソコンに取り込んで、情報量を求めたい！

どうすれば，よいであろうか？

標本化あるいは量子化という作業が必要になる！

標本化とは

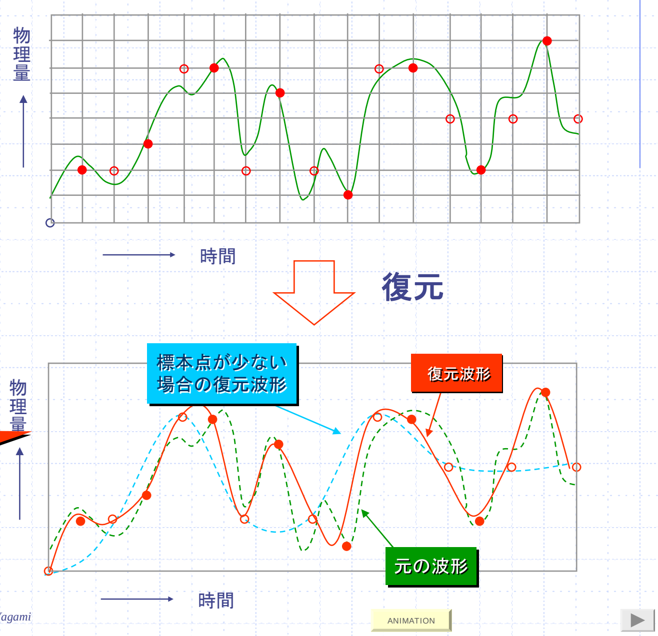


これだけの
ズレが出て
しまう！

ANIMATION

標本化とは

では、
標本化の間隔を、
少し狭めてみよう！



かなり、ズレが
少なくなった！

ANIMATION

- 自然界の物理現象を、デジタルコンピュータで処理しようとすると、「標本化」は不可欠！
- 「標本化」の間隔は、細かければ細かいほど、忠実！

  情報の消失がない ・・・
- しかし、工学の見地からは、コストパフォーマンスを考えなければならない！

そこで必要となるのが・・・

標本化定理

（ サンプリング定理ともいう ）

連続系と離散系の“橋渡し”TOOL！

ANIMATION

§7.2 標本化の数学的取扱い

- 理解するには，「フーリエ解析」の知識が必要！

  → これからのエンジニアには，何をやるにも必要不可欠な知識

  （エレクトロニクス，レーザー技術，コンピュータ，画像処理 etc.）
- フーリエ級数展開とフーリエ変換の関係

  フーリエ変換の性質とフーリエ変換の重要な定理を，

  良く復習しておく必要あり ・・・

トコロデ…

- 実験波形（連続量）などを計算機に取り込むには，離散化しなければならない！
  - その際，なるべく情報を失いたくない．

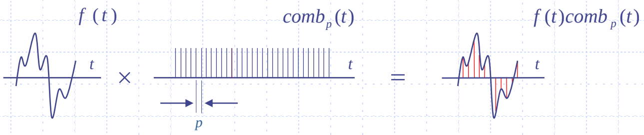
    → なるべく，細かくサンプリングしたい．

    → しかし，冗長には取りたくない．

では・・・どうしたら良いか？

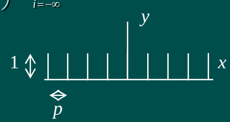
ANIMATION

連続波形をサンプリングするとは・・・



comb関数とは・・

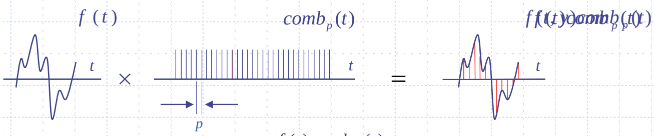
$$comb_p(t) = comb\left(\frac{t}{p}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - ip)$$



$$comb\left(\frac{t}{p}\right) \xleftrightarrow{FT} p\,comb(p\omega)$$

Comb 関数は、フーリエ変換しても *comb* 関数！

連続波形をサンプリングするとは・・・



$$f(t)comb_p(t)$$

$$\Updownarrow \text{FT}$$

$$F(\omega) \otimes comb_{\frac{1}{p}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega - \frac{n}{p}\right)$$

重畳積分（Convolution）定理

$$f(t) \otimes g(t) \xleftrightarrow{FT} F(\omega)G(\omega)$$

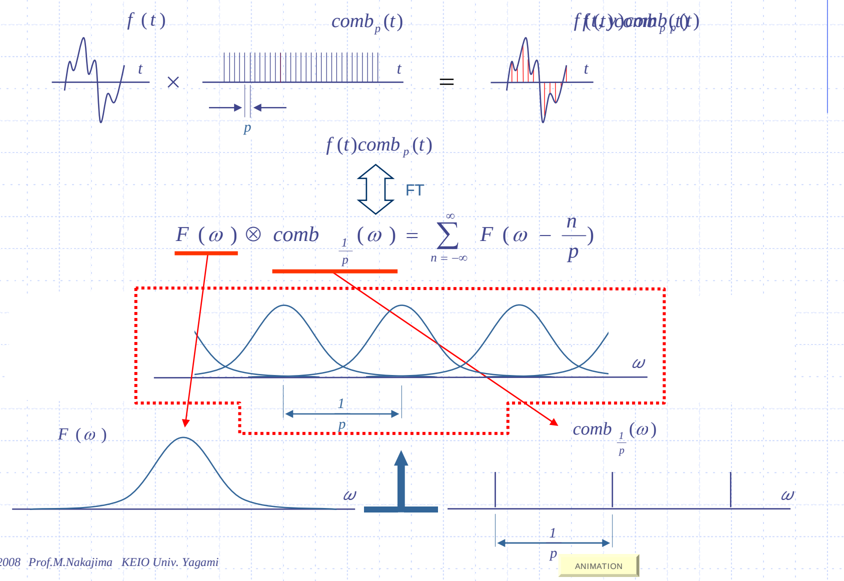
where,

$$f(t) \otimes g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t'-t)dt'$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt$$

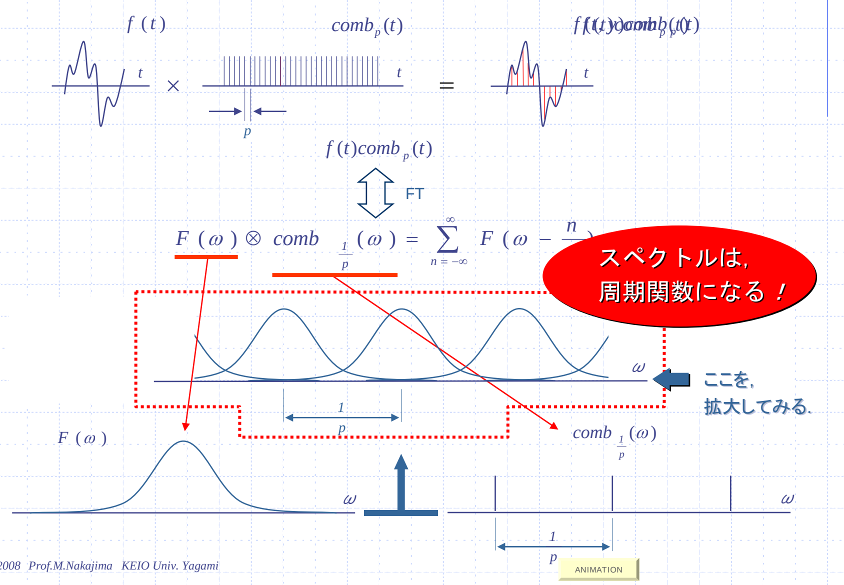
連続波形をサンプリングするとは・・・



ANIMATION

§7.2 標本化の数学的取扱い

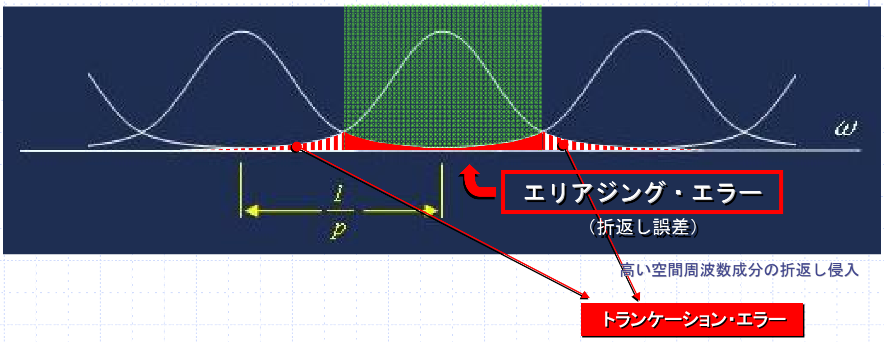
連続波形をサンプリングするとは・・・



Spring 2008 Prof.M.Nakajima KEIO Univ. Yagami

ANIMATION

連続波形をサンプリングするとは・・・



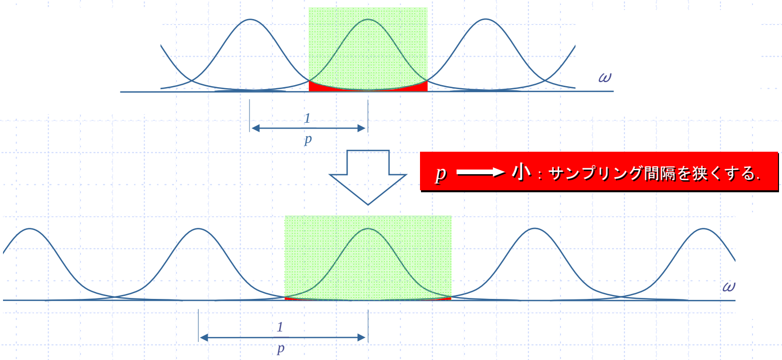
これらのエラーを減らすためには・・・

どうすれば良いか？

§7.2 標本化の数学的取扱い

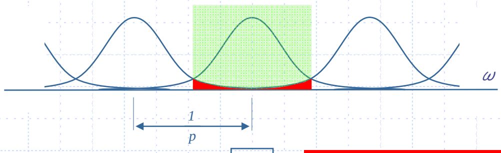
連続波形をサンプリングするとは・・・

これらのエラーを減らすためには・・・



連続波形をサンプリングするとは・・・

これらのエラーを減らすためには・・・



$p \longrightarrow$ 小：サンプリング間隔を狭くする.

相似性（Similarity）定理

波形の拡大・縮小に関する定理

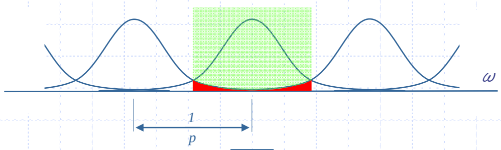
$$f(at) \overset{\text{FT}}{\rightleftarrows} \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

where $f(t) \overset{\text{FT}}{\rightleftarrows} F(\omega)$

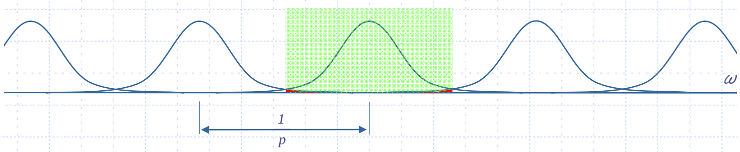
ANIMATION

連続波形をサンプリングするとは・・・

これらのエラーを減らすためには・・・



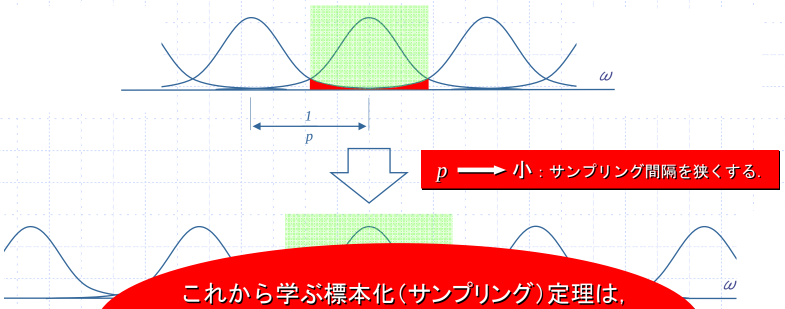
$p \longrightarrow$ 小：サンプリング間隔を狭くする.



- 極端な話になるが，
  p を無限小にすれば，スペクトルの周期 $1/p$ は無限大とになる.
  （要するに，連続関数のスペクトルと同じになる）

連続波形をサンプリングするとは・・・

これらのエラーを減らすためには・・・



これから学ぶ標本化（サンプリング）定理は，サンプリング間隔(p)を最適化を示唆する理論である.

- 極端な話にな

p を無限小にすれば，スペクトルの周期 $1/p$ は無限大となる.

（要するに，連続関数のスペクトルと同じになる）

2008年度

「情報工学」

第11回講義　おわり