創想館　14-201

2008-12

Tuesday　SPRING

13:00－14:30

2008年度

「情報工学」

第12回講義

前回学んだこと

復 習

- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘誤りがある場合の符号容量’ について学んだ.

☞ 通信路で誤りが生じる場合の符号容量

➤ $C' = R'_{max} = \left(\dfrac{H}{\tau}\right)'_{max} \Rightarrow \dfrac{(H'_{max})}{1} = \{H(x) - H(x/y)\}_{max}$

∵ 誤りがある場合には，$\tau = 1$.

➤ ‘ラグランジェの未定係数法’ を用い，$\dfrac{\partial\{H(x) - H(x/y)\}}{\partial p_i} = 0$

を与える p_i を求めて $H(x) - H(x/y)$ に代入することにより，

誤りがある場合の符号容量 C' を求める.

前回学んだこと

復 習

- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘連続波形の標本化’ について，その第一歩を学んだ.

☞ 連続波形をパソコンに取り込んで，種々の処理を行うには，‘標本化’ という作業が必要になる.

- 元波形の情報を失わせないため，標本化の間隔は細かければ細かいほど良い．しかし，細かすぎると，コストパフォーマンスが悪く（冗長に）なり，工学的評価は下がる.
- 残したい情報（波形の周波数情報）と標本化の最適間隔の関係を与えるのが，‘標本化定理’（サンプリング定理）である.

➤ ‘標本化定理’ は，連続系と離散系の “橋渡しTOOL” と言える！

前回学んだこと

復 習

- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘標本化定理’ を理解するのに必要な数学的準備.

➤ フーリエ変換の重要な定理とフーリエ変換の性質

☞ ① 畳み込み積分(Convolution)定理.
② 相似性(Similarity)定理,
③ 離散波形のフーリエ変換に伴う，各種‘ノイズの発生’，など.

- 連続波形を標本化するには,
元波形 $f(t)$ に $comb_p(t)$ を掛ける.

$$\text{where,}\quad comb_p(t) = comb\left(\frac{t}{p}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(t-ip)$$

- 標本化した波形をフーリエ変換すると，その結果得られるスペクトルは周期関数となり，‘折返しエラー(エリアジングエラー)’ などが生じる.

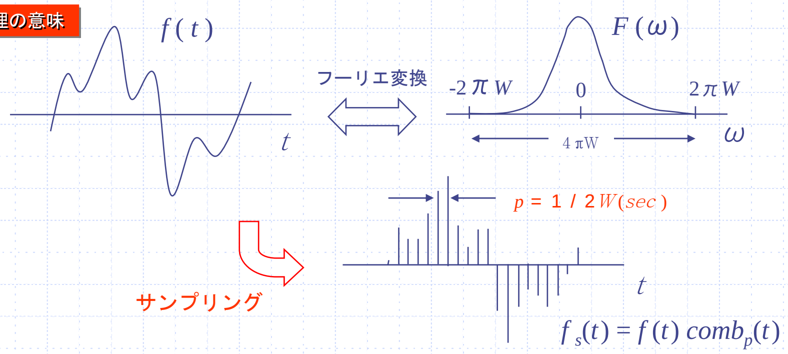
$$f(t)comb_p(t) \xrightarrow{FT} F(\omega)\otimes comb_{\frac{1}{p}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega-\frac{n}{p}\right)$$

§ 7.3 標本化定理

定理 1

ある波形 $f(t)$ のスペクトル $F(\omega)$ が，0 から W (Hz) までしかないとき，$f(t)$ の情報を失わせないサンプリング間隔は，$1/2W$ (sec) である.

定理の意味

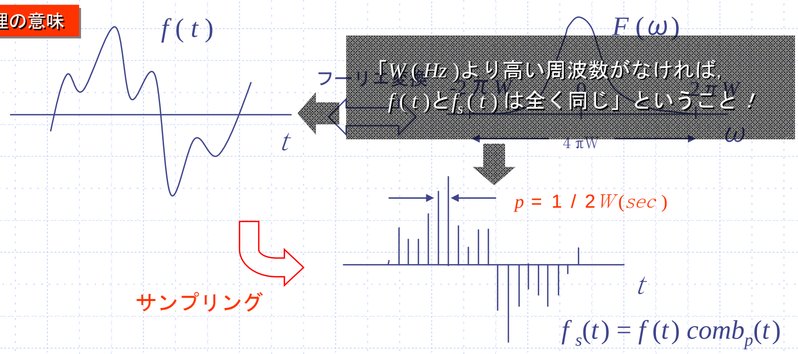


§7.3 標本化定理

定理１

ある波形 $f(t)$ のスペクトル $F(\omega)$ が，０ から W（Hz）までしかないとき，$f(t)$ の情報を失わせないサンプリング間隔は，1/2W（sec）である．

定理の意味

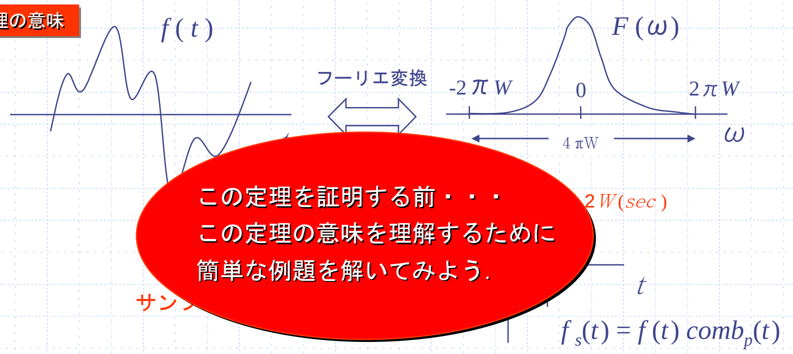


§7.3 標本化定理

定理１

ある波形 $f(t)$ のスペクトル $F(\omega)$ が，０ から W（Hz）までしかないとき，$f(t)$ の情報を失わせないサンプリング間隔は，1/2W（sec）である．

定理の意味



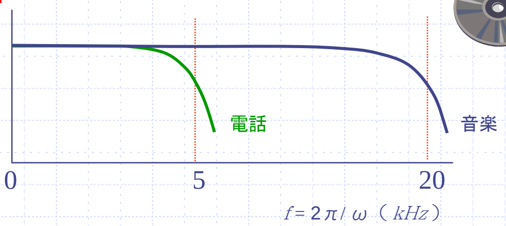
この定理を証明する前・・・
この定理の意味を理解するために
簡単な例題を解いてみよう．

Example 7.2.1

電話の音声と音楽をデジタル録音する時の、サンプリング間隔について

電話の声と楽器の演奏をデジタル録音して CD-R に保存する場合，同じサイズのディスクに録音できる時間は，どちらの場合がどれだけ長くなるか？ ただし，電話および楽器の演奏の録音に必要な周波数帯域は，下図の帯域特性を参考にして決めるものとする．

帯域特性



［略解］

電話の場合に必要となる最大周波数：W = 5 kHz

⇨ 必要なサンプリング間隔：$\Delta_s = \dfrac{1}{2\times5\times10^3} = 100\times10^{-6}\,(\mathrm{sec}) = 100\,(\mu\,\mathrm{sec})$

音楽の場合に必要となる最大周波数：W = 20 kHz

⇨ 必要なサンプリング間隔：$\Delta_s = \dfrac{1}{2\times20\times10^3} = 25\times10^{-6}\,(\mathrm{sec}) = 25\,(\mu\,\mathrm{sec})$

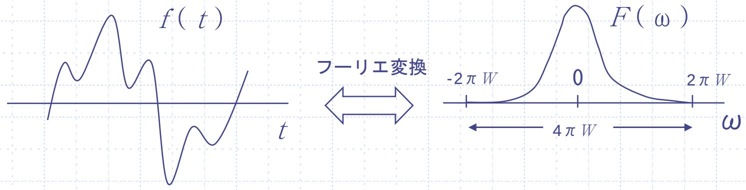
したがって，時間的に同じ長さの電話の声と音楽を録音しようとする場合，電話の声の方が，1/4 のトラック長でよいことになる．

すなわち，同じサイズのディスク（CD-Rなど）に録音できる時間は，電話の音声が音楽の 4 倍ということになる．

ANIMATION

定理１によれば，$f(t)$ の値を時間間隔 $1/2W\,(sec)$ で指定すれば，時間域全域にわたって $f(t)$ を決定できることになる．

定理１の証明



フーリエ逆変換 $$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{+j\omega t}d\omega \qquad (1)$$

$cf.\quad F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

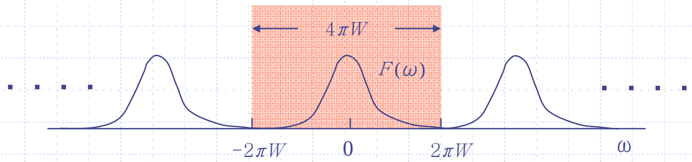
$$-2\pi W\le\omega\le 2\pi W \qquad (2)$$

$cf.\quad -W\le f\le W$

（１），（２）より

$$f(t)=\int_{-2\pi W}^{2\pi W}F(\omega)e^{+j\omega t}d\omega \qquad (1')$$

ここで，$F(\omega)$ を $-2\pi W\le\omega\le 2\pi W$ で指定される周期 $\omega_0=4\pi W$ の周期関数と考えてフーリエ級数展開してみる．



memo

（参考）フーリエ級数展開の指数表示は，

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{-jn\omega t}$$

ここで， $$C_n=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{jn\omega t}dt$$

$f(t)$を$F(\omega)$に置換えて考える．

$$\underset{F}{f}(\underset{\omega}{t}) = \frac{1}{\underset{\omega_0}{T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\overset{\xi}{\omega}\underset{\omega}{t}} \qquad \underset{\omega_0}{T} = 1/f = 2\pi/\overset{\xi}{\omega}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\omega_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\xi\omega} \qquad \underline{\omega_0 = 2\pi/\xi}$$

$$\xi = 2\pi/\omega_0$$
$$\underline{= 2\pi/4\pi W = 1/2W}$$

ところで,

$$C_n = \int_{-T/2}^{T/2} \underset{F}{f}(\underset{\omega}{t})\, e^{jn\overset{\xi}{\omega}\underset{\omega}{t}} dt$$

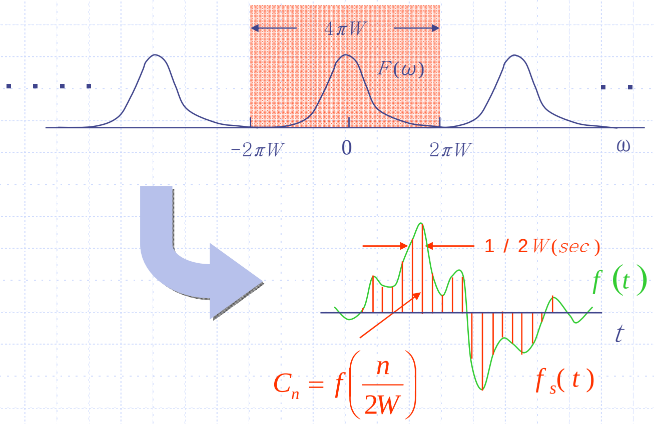
$$\Rightarrow C_n = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} F(\omega) e^{jn\xi\omega} d\omega$$

よって,
$$C_n = \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} F(\omega) e^{jn\frac{1}{2W}\omega} d\omega$$

$$= \int_{-2\pi W}^{2\pi W} F(\omega) e^{j\frac{n}{2W}\omega} d\omega \qquad (2)$$

(1’) と (2) を比較

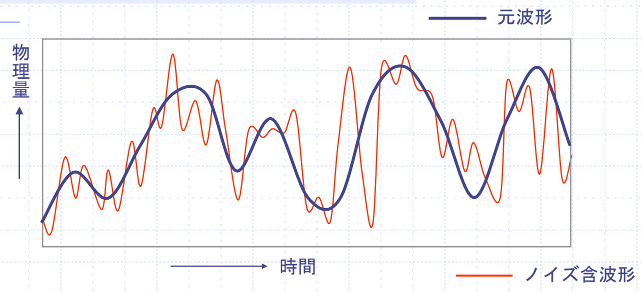
$$C_n = f\left(\frac{n}{2W}\right) \quad 、\quad n = 1,2,3 \quad \cdot\cdot\cdot$$



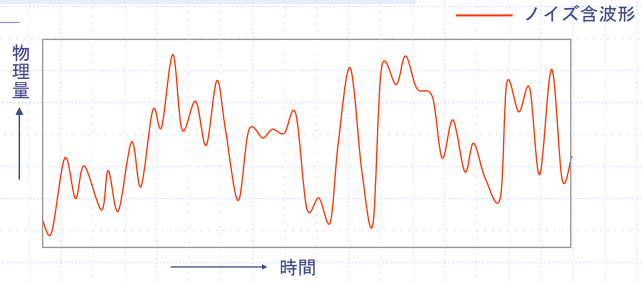
W ：ナイキスト周波数

$1/2W$ ：ナイキスト条件

[実際にサンプリングを行う場合の注意]



[実際にサンプリングを行う場合の注意]

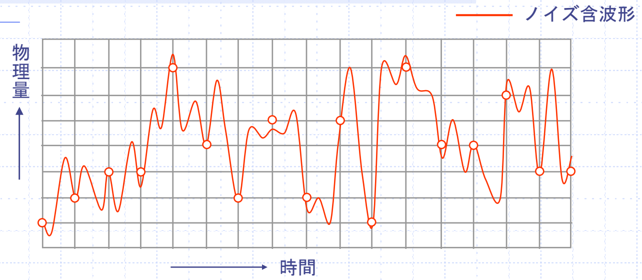


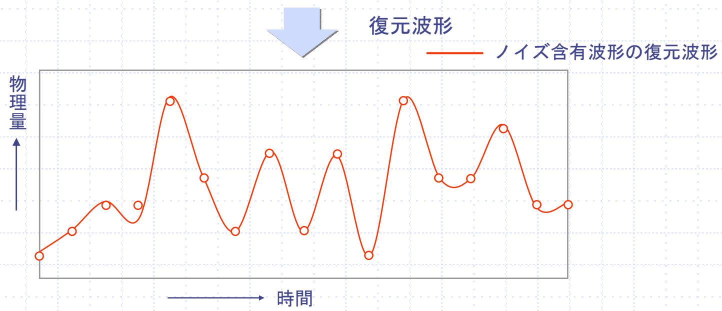
元の信号波形には，$W\,(Hz)$ 以上の周波数が含まれていないということになっている．

➡ $W\,(Hz)$ 以上の情報は，ノイズ！

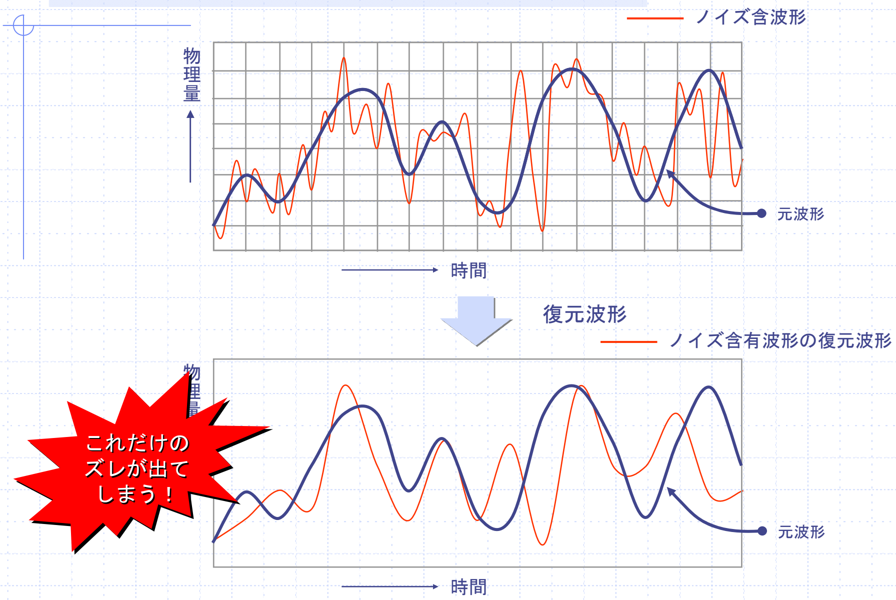
ノイズを含んだままの波形をサンプリングすると何がおこるか？

[ノイズを含んだままの波形のサンプリング]

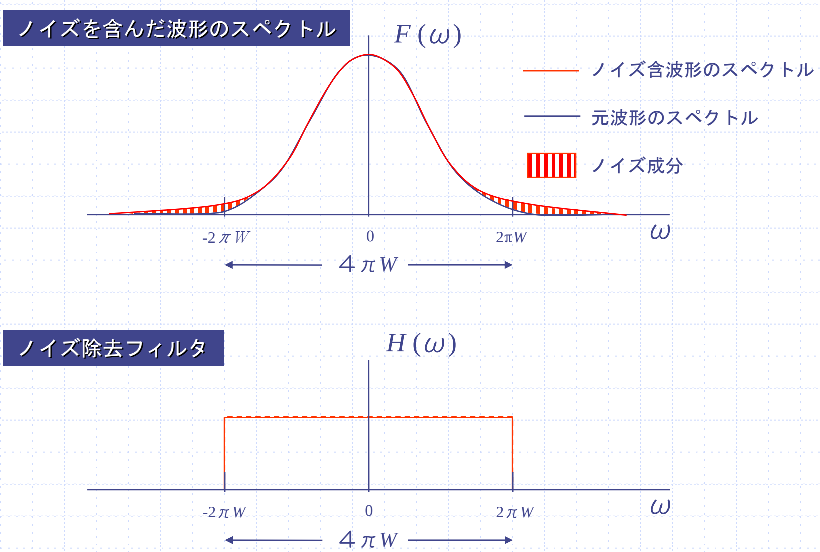




[ノイズを含んだままの波形のサンプリング]



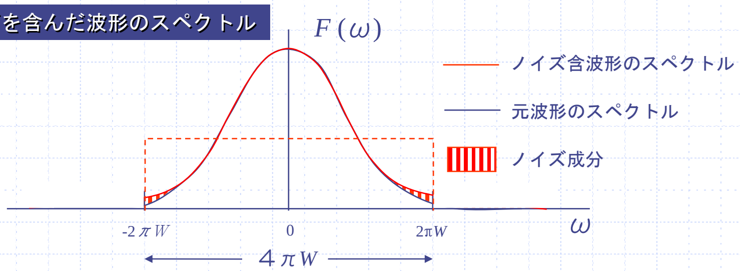
[ノイズ除去の方法]



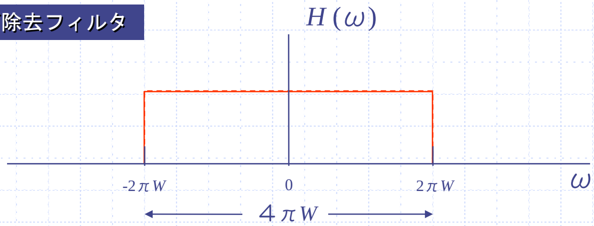
ANIMATION

[ノイズ除去の方法]

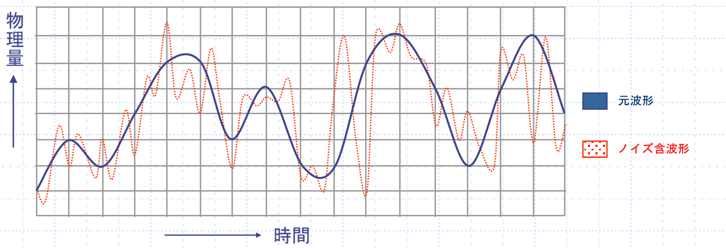
ノイズを含んだ波形のスペクトル



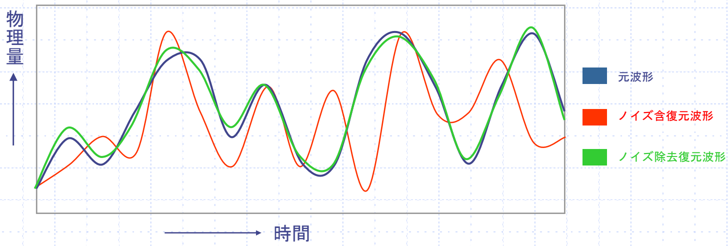
ノイズ除去フィルタ



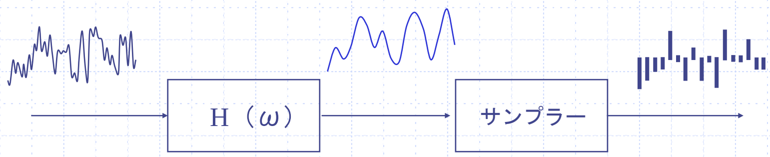
[フィルタリングによりノイズを除去した波形のサンプリング]



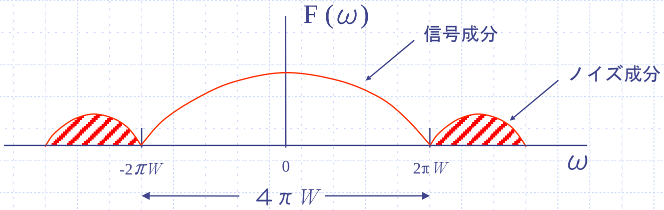
復元波形



［サンプリングシステムの構成］



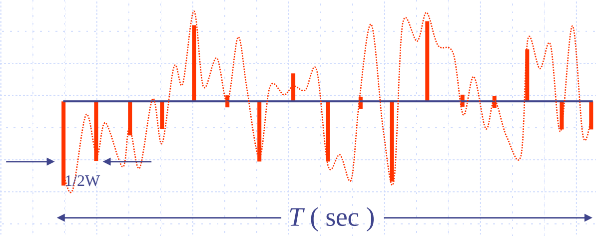
実は（厳密には），
フィルタリングによる完全なノイズ除去が可能なのは，信号の周波数成分とノイズの周波数成分が周波数軸上でオーバーラップしていない場合のみ！



§7.3 標本化定理

実際の系では，
時間関数 $f(t)$ もスペクトル $F(\omega)$ も有限〔$0 \rightarrow W$ (Hz)〕

したがって，
時間関数 $f(t)$ は，時間の区間 T (sec) を $1/2W$ (sec) で区切った $2WT$ 個の点で完全に決定される。



$2WT$ ⇨ Total Data 数

Example 7.2.2

最大周波数 5kHz の波形を1分間記録する場合に必要なデータ量は？

$F(\omega)$: 0 〜 5 kHz

T : 1 分 （ 60 sec)

$W = 5 \times 10^3$

$$\underbrace{2W}_{\text{1秒間あたりの必要サンプリング数}}\underbrace{T}_{\text{記録時間}} = 2 \times 5 \times 10^3 \times 60 = 6 \times 10^5 \ data$$

⇩

情報量と密接に関連した量

定理２

スペクトル $F(\omega)$ が、0から $W(Hz)$ までしかない波形に対し，
$t = n / 2W$ （ $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \cdots$ ）の時間における値（標本値）
$f(n/2W) = X_n$ を与えた時、X_n と $f(t)$ の関係は，次式で与えられる．

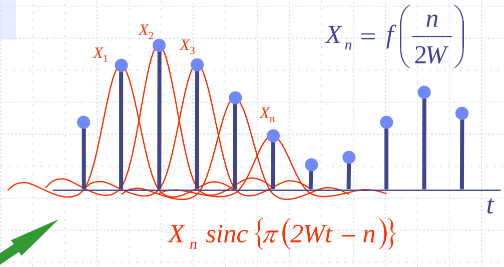
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \, sinc\,\{\pi(2Wt - n)\}$$

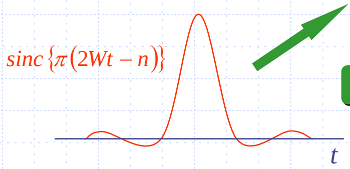
定理1の裏定理と言われている

すなわち，$\sum X_n \, sinc\,\{\pi(2Wt - n)\}$ は、周波数範囲 0 〜 W (Hz)
で，元の関数 $f(t)$ と完全に等しくなる．

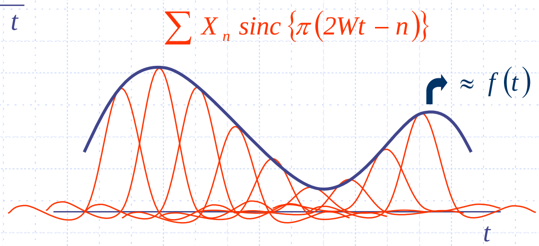
[この定理の意味]

$$X_n = f\left(\frac{n}{2W}\right)$$





Convolution



$$\sum X_n \, sinc\{\pi(2Wt-n)\} = f(t)$$

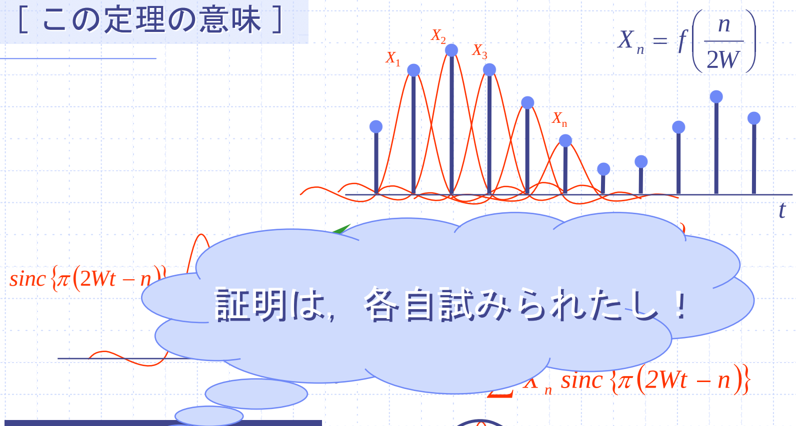
標本点群とジンク関数の畳み込みを行うと，元の波形 $f(t)$ が再生される．　ただし，保証される周波数情報は，最大最大周波数 $W(Hz)$ まで・・・

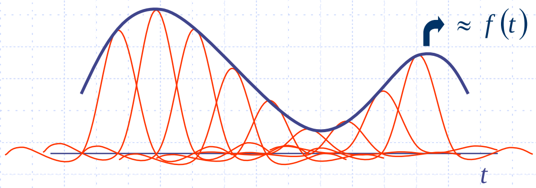
ANIMATION

§7.3 標本化定理

[この定理の意味]

$$X_n = f\left(\frac{n}{2W}\right)$$





$$\sum X_n \, sinc\{\pi(2Wt-n)\} = f(t)$$

標本点群とジンク関数の畳み込みを行うと，元の波形 $f(t)$ が再生される．　ただし，保証される周波数情報は，最大最大周波数 $W(Hz)$ まで・・・

[ご参考までに]

■「畳み込み」とは？

⇨ ２つの関数（波形）$f(t)$、$g(t)$ に対して、

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-t)dt$$

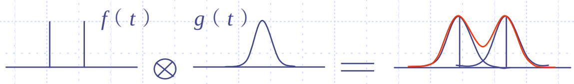
のような積分演算を施すこと．ここで、τ はダミイ変数．

$$h(t)= f(t)\otimes g(t)$$

とも記述する．

⇨ このような積分演算を「畳込積分」という．
コンボリューション（ Convolution ）ということもある．

■「畳込積分の物理的な意味」



$h(t)= f(t)\otimes g(t)$

[ご参考までに]

■「畳込積分の演算法」

⇨ $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau-t)dt$ この式を，このまま正直に計算すると，けっこう大変！

そこで，「重畳積分定理」（コンボリューション定理）を利用する．

★ 必ずというわけではないが・・・

コンボリューション定理

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

ならば $H(\omega)=F(\omega)G(\omega)$ である．

⇨ FFT（Fast Fourier Transform）演算法があるので，デジタル計算機でのフーリエ変換は，非常に高速で行うことができる．

⇨ そこで，$f(t)$，$g(t)$ をフーリエ変換して掛け合わせることによって $H(\omega)$ を取得し，それを逆フーリエ変換することによって $h(t)$ を得る．

[補間法としての定理２]　（定理２の別の見方）

■ 各種補間（内挿）法

（１） 線形補間

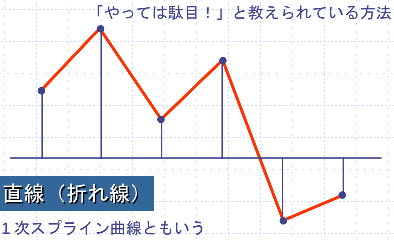
（２） 多項式補間

① ラグランジェ補間

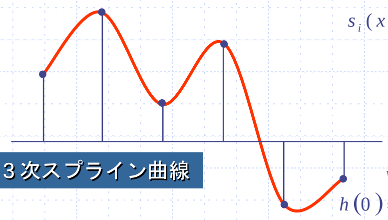
② スプライン補間

（３） ジンク補間

レポートでグラフを描く際，
「やっては駄目！」と教えられている方法



１次スプライン曲線ともいう



$$s_i(x) = \frac{f''(x_{i-1})}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6h_i}(x - x_{i-1})^3 + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i f''(x_{i-1})}{6}\right)(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i f''(x_i)}{6}\right)(x - x_{i-1})$$

where

$$h(0) = 0,\quad h_i = x - x_{i-1}\ ,\quad f''(x_0) = 0,\quad f''(x_n) = 0$$

$$f'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\quad f''(x_i) = \frac{f'(x_{i+1}) - f'(x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

ANIMATION

[補間法としての定理２]　（定理２の別の見方）

■ 各種補間（内挿）法

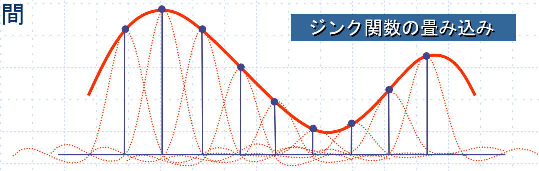
（１） 線形補間

（２） 多項式補間

① ラグランジェ補間

② スプライン補間

（３） ジンク補間



⇨ ジンク関数補間法は，$0 \sim W(Hz)$までの情報回復を保証するという意味で，情報理論的に最もリーズナブルな補間（内挿）法であるということができる．

ただし，有効なのは‘データが等間隔に存在する場合’であり，不等間隔に存在するデータに対しては，それなりの工夫が必要となってくる！

ANIMATION

2008年度

「情報工学」

第12回講義　おわり