創想館　14-201

2008-13

Tuesday　SPRING

13:00－14:30

2008年度

「情報工学」

第13回講義（最終回）

前回学んだこと

復 習

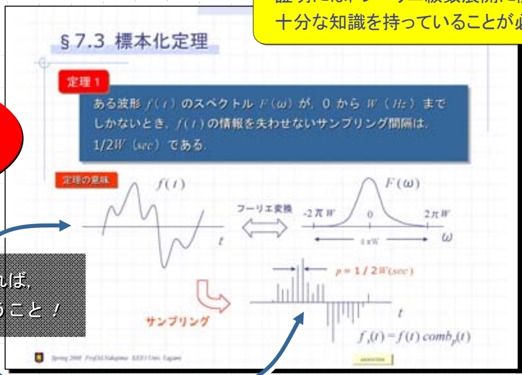
- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘標本化定理〔第１定理〕’を学んだ．

☞

証明には，フーリエ級数展開に関する十分な知識を持っていることが必要！

エンジニアとして・・・
これを知らないで社会に
出て行くと，‘大恥’をかく！



「$W(Hz)$より高い周波数がなければ，
$f(t)$と$f_s(t)$は全く同じ」ということ！

ANIMATION

前回学んだこと

復 習

- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘ナイキスト周波数’，‘ナイキスト条件’という言葉を覚えておくこと．

↳ W (Hz) のこと．　↳ $1/2W$ (sec) のこと．

✓ 実際に，ノイズを含んだ連続波形（実験で取得した波形等）をサンプリングする際の注意について知っておくこと．

➤ W (Hz) 以上をカットするローパスフィルタをかけてから，サンプリング処理を実施することによって，ノイズの影響を大幅に低減できる場合が多い．

✓ ‘標本化定理〔第２定理〕’を学んだ．

☞ 標本化定理の‘裏定理’とも言われる．

➤ サンプリングされた離散波形の連続波形への戻し方に関するもの．

復 習

前回学んだこと

- 覚えていなければいけないこと
- 答えられなければならないこと

✓ ‘標本化定理〔第2定理〕’ を学んだ.

☞ 標本化定理の ‘裏定理’ とも言われる.

➤ サンプリングされた離散波形の連続波形への戻し方に関するもの.

定理２

スペクトル $F(\omega)$ が、0から $W(Hz)$ までしかない波形に対し,
$t = n / 2W$ （$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$）の時間における値（標本値）
$f(n / 2W) = X_n$ を与えた時、X_n と $f(t)$ の関係は，次式で与えられる.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \,\mathrm{sinc}\,\{\pi(2Wt - n)\}$$

ANIMATION

復 習

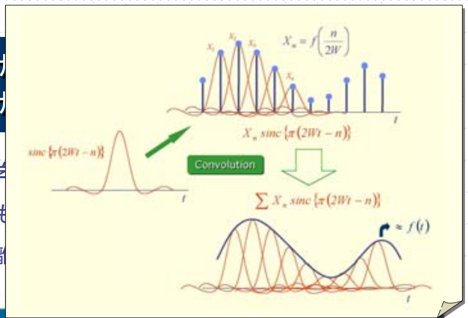
前回学んだこと

- 覚えていなけ
- 答えられなけ

✓ ‘標本化定理〔第2定理〕’ を学

☞ 標本化定理の ‘裏定理’ とも

➤ サンプリングされた離



定理２

スペクトル $F(\omega)$ が、0から $W(Hz)$ までしかない波形に対し,
$t = n / 2W$ （$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$）の時間における値（標本値）
$f(n / 2W) = X_n$ を与えた時、X_n と $f(t)$ の関係は，次式で与えられる.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \frac{\sin \pi(2Wt - n)}{\pi(2Wt - n)}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \,\mathrm{sinc}\,\{\pi(2Wt - n)\}$$

$$\sum X_n \,\mathrm{sinc}\,\{\pi(2Wt - n)\} \Rightarrow f(t)$$

標本点群とジンク関数の畳み込みを行うと，元の波形 $f(t)$ が再生される． ただし，保証される周波数情報は，最大最大周波数 $W(Hz)$ まで・・・

前回学んだこと

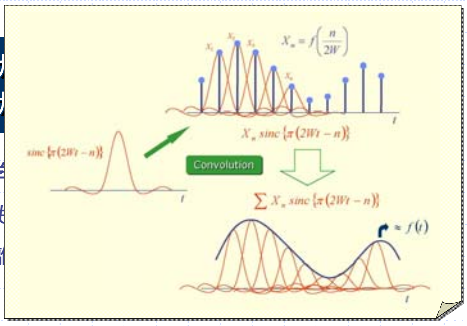
復 習

- 覚えていなけ
- 答えられなけ

✓ ‘標本化定理〔第2定理〕’を学

☞ 標本化定理の‘裏定理’とも

➤ サンプリングされた離



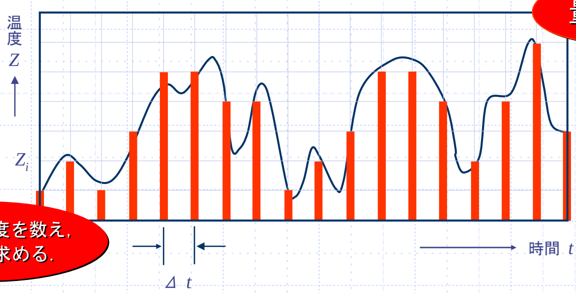
⇨ ジンク関数補間法は，0 ～ $W(Hz)$までの情報回復を保証する
という意味で，情報理論的に最もリーズナブルな補間（内挿）法
であるということができる．

§ 8 連続的情報源の情報量

§ 8.1 連続的情報源のエントロピー

【 標本化し，離散的情報源としてエントロピーを求めるには 】

量子化



Z_iの出現頻度を数え，
$p(Z_i)$を求める．

$$H = -\sum_i p(Z_i)\log_2 p(Z_i)$$

$$\text{where,}\quad \sum_i p(Z_i) = 1$$

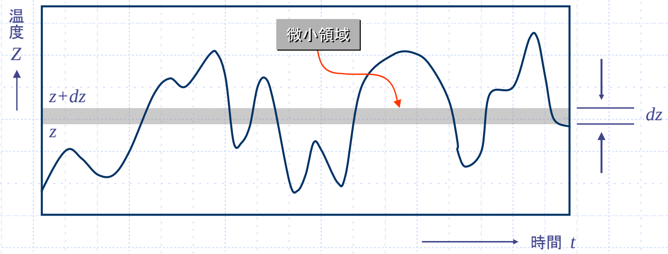
標本化せず，連続量のままでエントロピーを求めるには，どうしたらよいか？

ANIMATION

§8 連続的情報源の情報量

§8.1 連続的情報源のエントロピー

［ 言葉の確認 ］



- 温度が，z と $z+dz$ の間にある確率：$p(z)\,dz$ → 確率密度関数
- z が a と b の間にある確率：$\int_b^a p(z)dz$
- 確率密度関数の性質：$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 1$　　$cf.\ \sum_i p_i = 1$

- 自然界で，もっとも良く現れる確率密度関数 $p(z)$ は，

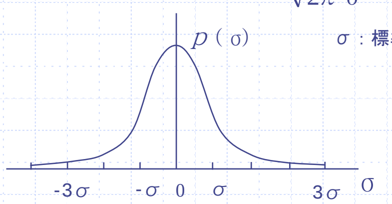
⇒ 正規分布（ガウシアン）：$p(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$

（例）雨量計

σ：標準偏差

cf. 一様分布

（例）サイコロの目



- 正規分布の性質
  - ・一次モーメント（期待値，平均値）：

$$E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} zp(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{\square}} e^{\square} dz = 0$$

  - ・二次モーメント（分散）：

$$V(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z)dz = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ = \sigma^2$$

連続的情報源に対するエントロピー［定義］：

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} p(z)\ln p(z)dz$$

ここで，$ln\ p(z) = log_e\ p(z)$

$cf.\quad H = -\sum_i p_i \log_2 p_i$

〜・〜

§8.2 連続的情報源におけるエントロピーの最大値

正規分布の場合の制約条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 1 \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z)dz = V \qquad (2)$$

これらのもとで、エントロピーの最大化を図ってみよう.

§8.2 連続的情報源におけるエントロピーの最大値

正規分布の場合の制約条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 1 \qquad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z)dz = V \qquad (2)$$

これらのもとで、エントロピーの最大化を図ってみよう.

そのために、 $\dfrac{\partial H}{\partial p} = 0$ を与える $p(z)$ を求める.

また、ラグランジェの未定係数法を用いる.

$$\frac{\partial}{\partial p}\left\{-p\,log\ p + \lambda_1 p + \lambda_2 z^2 p\right\} = 0$$

$$-p\frac{1}{p} - log\ p + \lambda_1 + \lambda_2 z^2 = 0$$

$$\therefore\quad log\ p = -1 + \lambda 1 + \lambda_2 z^2 \qquad \therefore\quad p = 2^{-1+\lambda_1+\lambda_2 z^2}$$

§8.2 連続的情報源におけるエントロピーの最大値

正規分布の場合の制約条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 1 \qquad （１）$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} z^2 p(z)dz = V \qquad （２）$$

これらのもとで、エントロピーの最大化を図ってみよう.

そのために、 $\dfrac{\partial H}{\partial p} = 0$ を与える $p(z)$ を求める.

$$\Longrightarrow \quad p = 2^{-1+\lambda_1+\lambda_2 z^2}$$

これを，（１），（２）式の条件に代入，

$$（１）\rightarrow \quad 2^{-1+\lambda_1}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{\lambda_2 z^2} dz = 1 \qquad （３）$$

$$（２）\rightarrow \quad 2^{-1+\lambda_2}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 2^{\lambda_2 z^2} dz = V \qquad （４）$$

ここで、
積分公式 $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} 2^{\lambda_2 z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\lambda_2}}$ を使用すると，

（３）式は， $\displaystyle 2^{-1+\lambda_2}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{\lambda_2 z^2} dz = 2^{-1+\lambda_2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\lambda_2}} = 1$ となる.

よって， $\displaystyle 2^{-1+\lambda_2} = \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{\pi}}$ （５）

（５）を（４）に代入すると，

$$V = \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 2^{-1+\lambda_2} dz$$

$$= \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot = \frac{\cancel{\sqrt{-\lambda_2}}}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\left(-\frac{1}{2\lambda_2}\cancel{\sqrt{\frac{\pi}{-\lambda_2}}}\right) = -\frac{1}{2\lambda_2}$$

$$\therefore \quad V = -\frac{1}{2\lambda_2}$$

また， $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2V}$

よって， $2^{\lambda_1 - 1} = \dfrac{\sqrt{-\lambda_2}}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\dfrac{1}{2\pi V}}$

$$\therefore \quad p(z) = 2^{\lambda_1 - 1} 2^{\lambda_2 z^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi V}}\, 2^{-\frac{z^2}{2V}}$$

e 正規分布の形となる

よってこの式をエントロピーの定義式に代入すると，最大値が得られる．

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) ln\ p(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ }} e^{-\square}\ ln \frac{1}{\sqrt{\ }} e^{-\square} dx$$

$$= \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$= \ln \sqrt{2\pi e \sigma^2} \quad \Leftarrow \quad H_{max}$$

エントロピーは、情報源の不規則性の程度を示す指標.

すなわち, x の二乗平均(power)が、一定の値に制限されているような情報源の中で、最も不規則な分布が「正規分布」ということになる.

この講義は, これで終わりです.
多くの学生諸君が, この講義を真剣に聴いてくれたと感じています ・・・ ありがとう！
試験 ・・・ 頑張ってください！
また, 秋学期に「画像工学」で会いましょう ・・・ 面白い講義にしたいと思っています！
最後に，アンケートへのご協力をお願いします.

アンケート

この講義について伺います．私の講義はこれで最後ですが，冥土への土産として，また来年からこの講義を引き継ぐ先生への伝言にしたいと思います．

1．この講義には，何回出席しましたか？ （私は，1度も休ます，全部で13回行いました．□内に数字を入れて下さい．）

□□回

2．私としては，常に解り易く講義するよう心掛けたつもりですが，いかがだったでしょうか？
講義内容（レベル）についてと講義の仕方について，別々に5段階で回答して下さい．

①講義内容（レベル）：（数字に○印を付けて下さい．）

難しかった ← 1 2 3 4 5 → 易しかった

②講義の仕方：（数字に○印を付けて下さい．）

解り難かった ← 1 2 3 4 5 → 解り易かった

さらに具体的に，どういう部分が悪く，どういう部分が良かったかを書いて頂ければ嬉しいです．（ここは，特になければ，書かなくてもけっこうです．）

3．この講義は，何度目の受講ですか？ （□内に✓を入れて下さい．）

□ ①今年がはじめて， □ ②昨年度落とし，今年が2度目， □ ③それ以上．

4．試験は，自信がありますか？ 5段階で回答して下さい．（数字に○印を付けて下さい．）

自信がない ← 1 2 3 4 5 → 自信がある

5．その他のご意見 （不満，アドバイス，その他，ご自由にご遠慮なくお書き下さい．）

以上です．ご協力ありがとうございました．

～・～

学科：＿＿＿＿＿ 学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿ 氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（注）アンケートの回答内容が成績に反映されることは，一切ありません．ただし，上記，学科・学籍番号・氏名の記入に関しては拒否して頂いてもかまいません．

2008年度

「情報工学」

第13回講義　最終回